

Mécanique analytique

Notes de cours de Paolo De le Rios

May 15, 2021

Contents

1	Rappels	3
1.1	cinématique	3
1.2	Les trois lois de Newton	3
1.3	Rappel de mécanique Newtonienne	4
1.3.1	Une seule particule de masse m	4
1.3.2	N particules	8
1.4	Problèmes avec la formulation newtonienne	15
1.5	Contraintes et coordonnées généralisées	16
2	Formalisme de Lagrange	19
2.1	déplacement virtuel	19
2.2	Equations de Lagrange	21
2.3	variables cycliques	23
2.4	Coordonnées normales	24
2.5	Calcul des variations	30
2.6	Principe de moindre action	32
2.7	Invariance de Jauge et Principe de moindre action	33
2.8	dérivée fonctionnelle	34
2.9	Moindre action et contraintes	36
2.10	Invariance de jauge du Lagrangien	37
2.11	Théorème de Noether	39
3	Formalisme de Hamilton	43
3.1	Le formalisme de Hamilton	43
3.2	Rappel sur la transformation de Legendre	43
3.3	Equations d'Hamilton	44
3.4	Crochets de poissons	47
3.5	Théorème de Poisson	49
3.6	Génération de nouvelles quantités conservées pour l'oscillateur harmonique	51
3.7	Transformation canonique 1	56
3.8	Transformation canonique 2	60
4	Formalisme de Hamilton-Jacobi	66
4.1	Hamilton-Jacobi 1	66
4.2	Hamilton-Jacobi 2	71
4.3	Vecteurs propres d'une matrice	74
4.4	Séparation des variables	75
4.5	Solution de l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi	78
4.6	Le portrait de phase	79
4.7	Variables action-angle	81

5	Notes variées	85
5.1	Système séparable	85
5.2	Coordonnées normales	85
6	Théorie des champs	89
6.1	Introduction à la théorie des champs	89
6.2	Equations dynamiques : équations d'Euler-Lagrange	91

Pour bien approcher la mécanique analytique il faut d'abord bien spécifier ce à quoi il faut s'attendre. On ne va pas introduire des phénomènes qui ne sont pas une conséquence des trois lois de Newton.

Pour ce qui concerne ce cours, les trois lois de Newton donnent une description complète et exacte de tous les phénomènes (systèmes) mécaniques. L'intérêt de ce cours est dans la formulation mathématique de la mécanique. Il n'est écrit nulle part que la formulation Newtonienne soit la plus appropriée, voir adaptée. On va donc se poser la question si on peut reformuler la mécanique (les trois lois) d'une façon mathématiquement plus puissante, qui nous permet de mieux mettre en évidence les relations entre concepts et phénomènes. Donc, dans la suite, on introduira les formalismes de Lagrange, de Hamilton et de Hamilton-Jacobi, en regardant ce que chacun d'entre eux aura à révéler. Encore une fois, ils ne vont pas nous dire des choses qui ne sont pas déjà contenues dans les lois de Newton. Tout simplement, ils vont mettre en évidence certaines relations, concepts et phénomènes.

On va commencer par quelques rappels.

1 Rappels

1.1 cinématique

La cinématique exprime les relations de base entre position, vitesse et accélération :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d}{dt} \vec{x} = \dot{\vec{x}} \\ \vec{a} &= \frac{d}{dt} \vec{v} = \dot{\vec{v}}\end{aligned}\quad (1)$$

Par intégration directe, on a donc

$$v(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t') dt' \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \vec{x}(0) + \int_0^t \vec{v}(t') dt' = \vec{x}(0) + \int_0^t \left[\vec{v}(0) + \int_0^{t'} \vec{a}(t'') dt'' \right] dt' = \\ &= \vec{x}(0) + \vec{v}(0) \cdot t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} \vec{a}(t'') dt''\end{aligned}\quad (3)$$

Une conséquence évidente est que, en l'absence d'accélération, la vitesse est une constante (vectorielle : constante en intensité, direction et sens) En principe, si l'on connaît les positions et vitesses initiales, ainsi que les accélérations à chaque instant, on peut intégrer les équations.

Le problème reste tout de même que les particules (objets) dont l'on cherche l'évolution temporelle, interagissent entre elles. Donc les accélérations dépendent elles aussi des positions. Le problème est donc assez complexe.

1.2 Les trois lois de Newton

Dans son ouvrage les "Principia" (1687... en latin!), Newton a défini les lois mathématiques nécessaires pour décrire tous les systèmes mécaniques. On peut voir ces lois comme les postulats nécessaires à définir un bâtiment mathématique complet et consistant. Comme on le sait de la physique générale, il y a trois lois :

1. Un corps sur lequel aucune force est appliquée, reste dans son état de mouvement rectilinéaire uniforme, c'est à dire à vitesse constante (vectorielle)
2. $\vec{F} = m\vec{a}$
3. Loi de action-réaction

La deuxième loi est bien évidemment phénoménologique : elle est déduite des observations.

Que peut on dire de la première loi ? Utilisant la deuxième loi en absence de force :

$$m\vec{a} = 0 \implies \vec{a} = 0 \implies \vec{v} \text{ constante} \quad (4)$$

La 1ère loi est-elle donc vraiment nécessaire ?

Disons que dans mon référentiel il n'y a pas de force sur un ballon : sa vitesse $\vec{v}$ reste constante. Je dis à une amie à moi qu'il n'y a pas de force, mais elle mesure quand même une accélération (vitesse non constante), donc elle a seulement deux possibilités :

1. Je suis un menteur, et en réalité il y a une force sur le ballon
2. La première loi ne s'applique pas pour elle (et en conséquence la deuxième non plus!).

Attention : Il faut définir rigoureusement l'expression "pour elle". Elle signifie dans son référentiel. On peut donc dire que la première loi a à faire avec les référentiels. Elle nous dit quels sont les référentiels qui partagent les mêmes lois (c'est à dire qui sont les "observateurs" qui tirent les mêmes conclusions en observant le même système). En mécanique, la première loi affirme donc :

- Tous les référentiels dans lesquels un corps bouge de manière uniforme ($\vec{v} = \text{const}$), si il n'est pas soumis à une force, forment un jeu de référentiels "galiléens"(ou "inertiels") et ils sont en mouvement relatif uniforme (vitesse relative constante)

Tous ces référentiels "partagent" les mêmes lois.

Après cette discussion sur ce qui se cache derrière la première loi, il est temps pour un rappel de mécanique Newtonienne.

1.3 Rappel de mécanique Newtonienne

1.3.1 Une seule particule de masse m

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) - \frac{dm}{dt}\vec{v} = \dot{\vec{p}} - \dot{m}\vec{v} \quad (5)$$

on considère uniquement les cas où la masse ne varie pas dans le temps ($\dot{m} = 0$)

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \qquad \dot{\vec{p}} = m\vec{v} = \text{impulsion} \quad (6)$$

En l'absence de forces, $\vec{F} = 0$, on a :

$$\dot{\vec{p}} = 0 \implies \vec{p} = \text{const} \quad (\text{on dit que } \vec{p} \text{ est conservé}) \quad (7)$$

Moment cinétique On peut également calculer le moment cinétique $\vec{L}$ défini comme : $\vec{L} = \vec{p} \wedge \vec{r}$. On calcule la variation temporelle de $\vec{L}$ sous l'action d'une force $\vec{F}$:

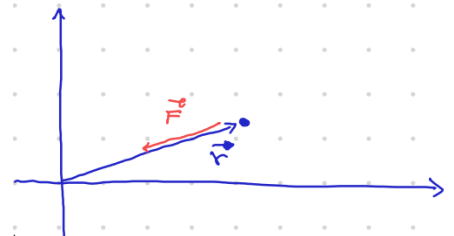
$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p} \wedge \vec{r}) = \dot{\vec{p}} \wedge \vec{r} + \vec{p} \wedge \dot{\vec{r}} = \quad (8)$$

$$= \vec{F} \wedge \vec{r} + \vec{p} \wedge \vec{v} = \vec{F} \wedge \vec{r} + m \underbrace{(\vec{v} \wedge \vec{v})}_{=0} = \underbrace{\vec{F} \wedge \vec{r}}_{\text{Moment de force}} \quad (9)$$

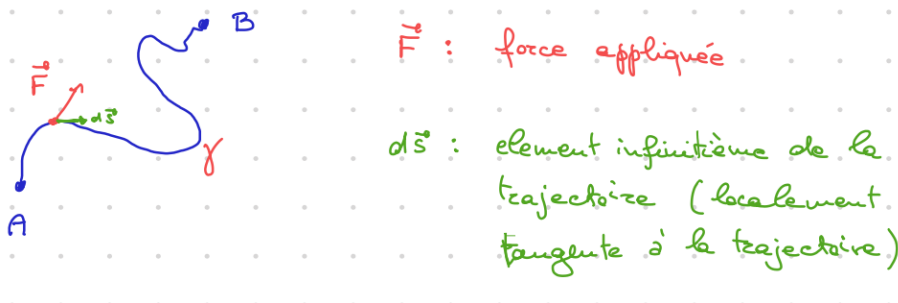
Donc le moment cinétique est conservé lorsque $\dot{\vec{L}} = 0$, ce qui est vrai si

- $\vec{F} = 0$ pas de force agissante sur la particule
- $\vec{F} \parallel \vec{r}$ c'est le cas d'une force centrale

On insiste sur la "conservation" car ce concept va être centrale pour tout le cours.



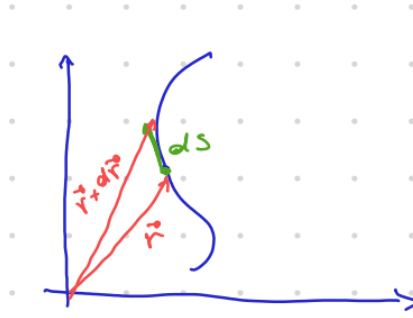
Travail et Energie On regarde maintenant l'énergie. Si on applique une force $\vec{F}$ lorsque l'on déplace une particule d'un point A à un point B, au long d'une trajectoire γ , on a que le travail est



$$W_{AB,\gamma} = \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (10)$$

$d\vec{s}$ dépend de la paramétrisation.

Si on choisit de paramétrer la courbe par le temps



paramétrisation temporelle $d\vec{s} = d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v} dt$

$$W_{AB,\gamma} = \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (11)$$

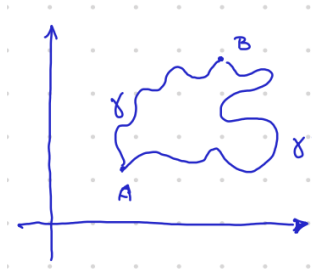
$$\stackrel{\text{2ème loi}}{=} \int_{A,\gamma}^B \left(\frac{d}{dt} \vec{p} \right) \cdot \vec{v} dt = \int_{A,\gamma}^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \quad (12)$$

$$= \int_{A,\gamma}^B m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dt \quad (13)$$

$$= \int_{A,\gamma}^B \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right)}_{\text{énergie cinétique}} dt = T_B - T_A \quad (14)$$

Donc le travail au long d'une trajectoire détermine le changement d'énergie cinétique.

système conservatifs Que se passe-t-il si l'on va de A à B selon deux trajectoires différentes ? Est-ce que $W_{AB,\gamma}$ et $W_{AB,\gamma'}$ sont égales ?



Si ils ne sont pas les mêmes, on ne peut pas dire grand choses. Mais si ils sont égales :

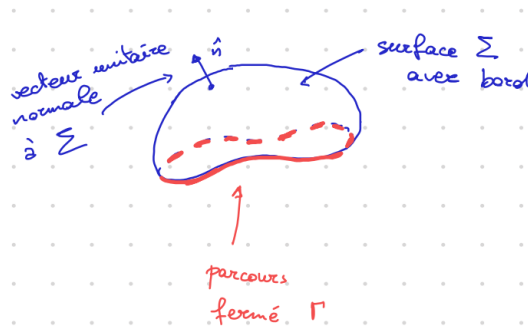
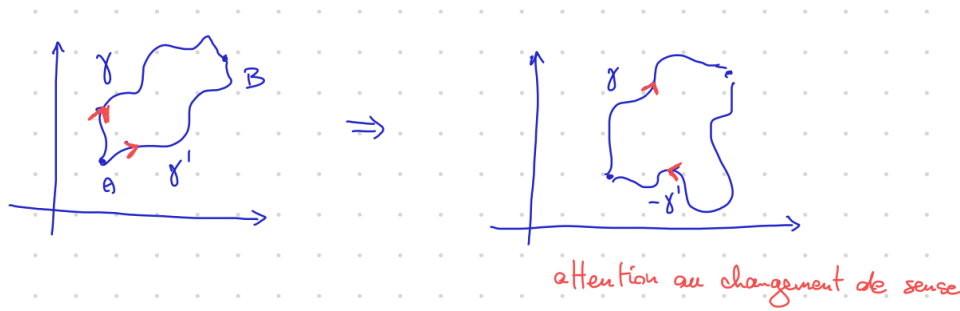
$$W_{AB,\gamma} = W_{AB,\gamma'} \Rightarrow \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A,\gamma'}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (15)$$

$$\Rightarrow \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{A,\gamma'}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (16)$$

On peut donc écrire

$$0 = \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{A,\gamma'}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{A,-\gamma'}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{\underbrace{\gamma \cup (-\gamma')}_{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (17)$$

Or, à l'aide du théorème de Stokes :



$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} d\Sigma = 0 \quad (18)$$

Où Σ est une quelconque surface avec pour bord Γ . Si cette dernière relation est vraie pour tout Γ , et pour une surface Σ (avec bord Γ), alors

$$\text{rot} \vec{F} = 0 \quad \text{partout} \quad (19)$$

Donc $\vec{F}$ est irrotationnel.

potentiel Un champs vectoriel irrotationnel implique que le vecteur peut être écrit comme gradient d'une fonction. Dans le cas particulier qu'on est en train de regarder :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad \text{énergie potentielle} \quad (20)$$

Attention au signe moins qui n'est qu'une convention dans la définition. Les forces avec cette propriété sont dites "conservatives".

Finalement on revient au travail de la force pendant le transport de A à B (qui ne depends pas de la trajectoire si la force dérive d'un potentiel)

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (-\vec{\nabla} V \cdot d\vec{s}) = - \int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s} \quad (21)$$

On rappelle que

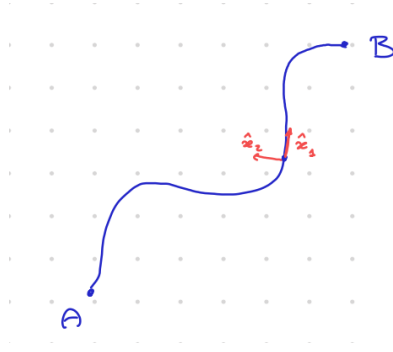
$$\vec{\nabla} V = \frac{dV}{dx} \hat{x} + \frac{dV}{dy} \hat{y} + \frac{dV}{dz} \hat{z} \quad (22)$$

Ou de manière plus générale :

$$\vec{\nabla} V = \sum_{i=1}^d \frac{dV}{dx_i} \hat{x}_i \quad \text{en d-dimension} \quad (23)$$

Mais le choix du système de coordonnées est arbitraire

On peut toujours choisir un système de coordonnés tel que un des vecteurs unitaires est localement tangente à la trajectoire et les autres sont perpendiculaires. Dans ce cas, celui tangent est parallèle à $d\vec{s}$ et donc



$$\nabla V \cdot d\vec{s} = \left(\frac{dV}{dx_1} \underbrace{\hat{x}_1}_{\text{tangent}} + \frac{dV}{dx_2} \hat{x}_2 + \dots + \frac{dV}{dx_d} \hat{x}_d \right) \cdot d\vec{s} \quad (24)$$

$$= \frac{dV}{dx_1} \hat{x}_1 \cdot d\vec{s} + \sum_{i=2}^d \frac{dV}{dx_i} \underbrace{\hat{x}_i \cdot d\vec{s}}_{=0} \quad (25)$$

Le deuxième terme est nul car tous les $\hat{x}_i$ sont perpendiculaires à $d\vec{s}$.

Finalement

$$\nabla V \cdot d\vec{s} = \frac{dV}{dx_1} \hat{x}_1 \cdot d\vec{s} \quad (26)$$

Mais avec $d\vec{s} = \hat{x}_1 dx_1$:

$$\nabla V = \frac{dV}{dx_1} dx_1 \quad (27)$$

Où on appelle x_1 la paramétrisation de la trajectoire.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{x_A}^{x_B} \frac{dV}{dx_1} dx_1 = V_A - V_B \quad (28)$$

On se rappelle que $W_{AB} = T_B - T_A$

Et donc on a

$$T_B - T_A = V_A - V_B \quad \Rightarrow \quad \underbrace{T_A + V_A}_{E_A} = \underbrace{T_B + V_B}_{E_B} = \text{énergie mécanique totale} \quad (29)$$

Théorème de l'énergie mécanique Donc, pour un système de forces conservatives, l'énergie mécanique totale est conservée.

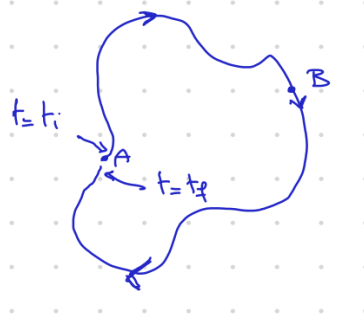
On remarque qu'une propriété d'un système de forces conservatives est qu'elles ne dépendent pas du temps. En effet : Si la force pouvait changer dans le temps, alors on pourrait imaginer qu'elle ne soit pas nulle quand le système passe de A à B, mais qu'elle soit nulle lorsque le système revient en arrière.

Alors, $W_{AB,\gamma} \neq 0$ mais $W_{AB,-\gamma'} = 0$ et donc

$$\oint_{\gamma \cup (-\gamma')} \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0 \quad (30)$$

Bien évidemment on peut organiser le changement temporel de façon à ce que l'intégrale sur la boucle soit quand même nul, mais il s'agit de cas particuliers et non pas généraux.

Donc, une propriété importante d'une force conservatives est d'être constante dans le temps



1.3.2 N particules

Le jeu des positions est $\{\vec{r}_i\}_{i=1}^N$, des vitesses est $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^N$ et des impulsions est $\{\vec{p}_i\}_{i=1}^N$. Chaque particule interagit avec les autres : $\vec{F}_{ij}$ est la force que la i-ème particule applique sur la j-ème.

Donc pour la deuxième loi de Newton

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_j \vec{F}_{ji} + \underbrace{\vec{F}_i^{ext}}_{\text{force externe agissant sur la particule } i} \quad (31)$$

On somme sur toutes les particules

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \underbrace{\sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji}}_{i \neq j} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \quad (32)$$

Somme et dérivée sont opérations linéaires, donc on peut échanger l'ordre d'exécution : $\sum_i \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i$. $i \neq j$ car une particule n'applique pas une force sur elle-même.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{p}_i \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \quad (33)$$

On définit le centre de masse $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ où $M = \sum_{i=1}^N m_i$ est la masse totale du système.

La vitesse du centre de masse est

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \quad (34)$$

$$\Rightarrow M \dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{P} \quad \text{impulsion totale du système} \quad (35)$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}}_{\vec{F}_{tot}^{ext}} \quad (36)$$

Maintenant on va travailler sur $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji}$. D'abord on l'écrit comme somme de ses deux moitiés :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \quad (37)$$

Mais lorsque l'on somme sur les deux indices, on peut toujours échanger les indices : cela revient à changer l'ordre de la somme sans changer le résultat.

exemple $N = 3$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ij} = \sum_{i=1}^3 \left(\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \vec{F}_{i3} \right) \quad (38)$$

$$= \left(\vec{F}_{11} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \right) + \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{22} + \vec{F}_{23} \right) + \left(\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{33} \right) \quad (39)$$

$$= \left(\vec{F}_{11} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} \right) + \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{22} + \vec{F}_{32} \right) + \left(\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{33} \right) \quad (40)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \left(\vec{F}_{1i} + \vec{F}_{2i} + \vec{F}_{3i} \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{F}_{ji} \quad (41)$$

C'est donc un long détour pour montrer que lorsque l'on a une somme sur plusieurs double indices, on peut les échanger.

Donc on reprend la somme :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} = \quad (42)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} \right) \quad (43)$$

La troisième loi de Newton nous dit : $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$. Donc

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\vec{F}_{ji} - \vec{F}_{ji} \right) = 0 \quad (44)$$

Finalement, on arrive à :

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = 0 + \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} \quad (45)$$

En absence de force externes, ou si la somme des forces externes est nulle, alors

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{l'impulsion totale du système est conservée} \quad (46)$$

On voit alors que, par rapport au cas d'une seule particule, l'impulsion totale est conservée grâce à la troisième loi de Newton.

Moment cinétique On porte notre attention au moment cinétique

$$\vec{L}_i = \vec{p}_i \wedge \vec{r}_i \quad (47)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \wedge \vec{r}_i + \vec{p}_i \wedge \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad (48)$$

On somme à nouveau sur i

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{L} = \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\text{2ème loi}} \wedge \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \underbrace{\vec{p}_i \wedge \frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{=0 \text{ car } \vec{r}_i = \vec{v}_i \parallel \vec{p}_i} \quad (49)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \right) \wedge \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \wedge \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \wedge \vec{r}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \wedge \vec{r}_i}_{\text{moment des forces externes}} \quad (50)$$

On travaille la double somme

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ji} \wedge \vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \wedge \vec{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \wedge \vec{r}_i \quad (51)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \wedge \vec{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ij} \wedge \vec{r}_j = \quad (52)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \wedge \vec{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (-\vec{F}_{ji}) \wedge \vec{r}_j = \quad (53)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\vec{F}_{ji} \wedge \vec{r}_i - \vec{F}_{ji} \wedge \vec{r}_j] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \wedge (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = \quad (54)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \wedge \vec{r}_{ji} \quad (55)$$

Finalement, en définissant

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i \quad \text{moment cinétique totale} \quad (56)$$

On a

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \wedge (\vec{r}_j - \vec{r}_i) + \sum_i \vec{F}_i^{ext} \wedge \vec{r}_i \quad (57)$$

Théorème du moment cinétique $\vec{L}$ est conservé si

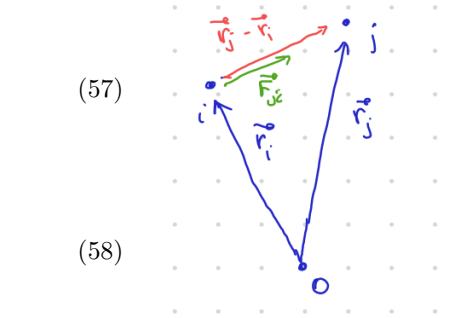
$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} \wedge \vec{r}_i = 0 \quad (\text{typiquement si } \vec{F}_i^{ext} = 0 \forall i) \quad (58)$$

et si

- Les particules n'interagissent pas ($\vec{F}_{ij} = 0 \forall i, j$)
ou
- $\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \iff$ Forces centrales !!!

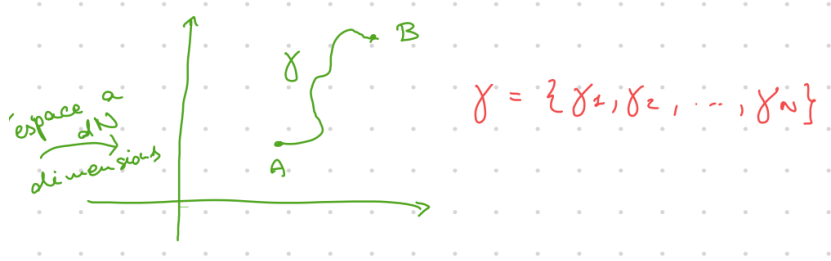
Energie et Travail Par analogie à ce qu'on a fait pour une particule seule, on va aussi s'intéresser à l'énergie. On procède selon les mêmes lignes que pour une seule particule. Les forces sont appliquées aux particules pour les transporter de A à B : $\{\vec{r}_{i,A}\} \rightarrow \{\vec{r}_{i,B}\}$

$$\text{Le travail est} \quad W_{AB} = \sum_i \int_{A, \gamma_i}^B \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i \quad (59)$$



Où γ_i est le chemin de A à B pour la i-ème particule et $d\vec{s}_i$ est l'infinitième tangent à γ_i .

Note : même si le système est composé par N particules, on peut, mathématiquement, le voir comme un seul point dans un espace à dimension d·N (donc N pour des particules en 1-dimension, 2N en 2-dimensions, 3N en 3-dimensions, etc ...). Dans le reste du cours, on utilisera souvent 3N, pour simplicité, tout en sachant qu'il s'agit d'un cas particulier.



Alors on reprend le travail :

$$W_{AB,\gamma} = \sum_i \int_{A\gamma_i}^B \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_{A\gamma_i}^B \dot{\vec{p}}_i \cdot \overbrace{\vec{v}_i}^{d\vec{s}_i} dt \quad (60)$$

$$= \sum_i \int_{t_A\gamma_i}^{t_B} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} dt = \sum_i (T_{B_i} - T_{A_i}) = T_B - T_A \quad (61)$$

$$\text{Et l'on définit l'énergie cinétique totale } T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \quad (62)$$

De plus, si les forces entre les particules sont conservatives (aussi bien que les forces externes) on aura :

$$W_{AB,\gamma} = \sum_i \int_{A,\gamma_i}^B \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_{A,\gamma_i}^B \left[\sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{ext} \right] \cdot d\vec{s}_i \quad (63)$$

$$= \sum_i \sum_j \int_{A_1\gamma_i}^B \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i + \sum_i \int_{A_1\gamma_i}^B \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{s}_i \quad (64)$$

$$= \sum_i \sum_j \int_{A_1\gamma_i}^B \left(-\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ji}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \right) \cdot d\vec{s}_i - \sum_i \int_{A,\gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_i^{ext}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{s}_i \quad (65)$$

On met en évidence que le gradient doit être pris par rapport à la position de la particule sur laquelle la force est appliquée :

$$\vec{F}_{ji} : \text{force appliquée sur } i \text{ par la particule } j \quad (66)$$

$$\Rightarrow \text{gradient par rapport à } \vec{r}_i \quad (67)$$

Aussi, on a gardé les indices pour les potentiels, V_{ij} et V_i , car chaque particule peut être soumise à des forces différentes, et de même pour chaque couple de particules : deux particules chargées interagissent par biais de l'électrostatique et de la gravitation; deux particules neutres interagissent uniquement par biais de la gravitation.

deuxième terme La partie associées aux forces externes est simple :

$$-\sum_i \int_{A, \gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_i^{ext}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{s}_i = -\sum_i \int_{A, \gamma_i}^B \frac{dV_i^{ext}}{ds_i} ds_i \quad (68)$$

$$= -\sum_i [V_i^{ext}(\vec{r}_B) - V_i^{ext}(\vec{r}_A)] = \sum_i V_i^{ext}(\vec{r}_A) - \sum_i V_i^{ext}(\vec{r}_B) = \quad (69)$$

$$= V_{\text{tot}}^{ext}(\{\vec{r}_{iA}\}) - V_{\text{tot}}^{ext}(\{\vec{r}_{iB}\}) \quad (70)$$

$$\text{Où l'on a défini } V_{\text{tot}}^{\text{ext}}(\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N V_i^{ext}(\vec{r}_i) \quad (71)$$

premier terme La partie avec les interactions entre particules est un peu plus compliquée :

$$-\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{A, \gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ji}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \cdot d\vec{s}_i = -\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N}_{\text{échange d'indices}} \left[\int_{A, \gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ji}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \cdot d\vec{s}_i + \int_{A, \gamma_j}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}(\vec{r}_j, \vec{r}_i) \cdot d\vec{s}_j \right] \quad (72)$$

On fait les hypothèses (raisonnables) suivantes :

$$1. V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = V_{ji}(\vec{r}_j, \vec{r}_i)$$

c'est à dire les deux particules interagissent par biais d'un potentiel ne dépendant pas de l'ordre. On pense par exemple à l'interaction coulombienne ou gravitationnelle

- Electrostatique $V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$
- Gravitationnelle $V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$

$$2. V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \text{ comme conséquence}$$

On peut donc travailler sur la partie

$$\int_{A, \gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) d\vec{s}_i + \int_{A, \gamma_j}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \cdot d\vec{s}_j \quad (73)$$

En effet

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(|\vec{r}_{ij}|) \quad \text{with } \vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad (74)$$

On peut le voir de manière plus simple en 1 dimension :

$$\frac{d}{dx_i} f(x_i - x_j) = \frac{d(x_i - x_j)}{dx_i} \frac{df(x_i - x_j)}{d(x_i - x_j)} = 1 \cdot \frac{df(x_{ij})}{dx_{ij}} \quad (75)$$

$$\frac{d}{dx_j} f(x_i - x_j) = \frac{d(x_i - x_j)}{dx_j} \frac{df(x_i - x_j)}{d(x_i - x_j)} = -1 \cdot \frac{df(x_{ij})}{dx_{ij}} \quad (76)$$

et donc

$$\frac{d}{dx_i} f(x_i - x_j) = -\frac{d}{dx_j} f(x_i - x_j) \quad (77)$$

Le cas en plusieurs dimension avec le gradient est très similaire :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} f(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} f\left(\{x_i^\alpha - x_j^\alpha\}_{\alpha=i}^d\right) \quad \alpha \text{ marque les composantes} \quad (78)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^d \frac{d}{dx_i^\alpha} f(\{x_i^\alpha - x_j^\alpha\}) \cdot \hat{x}^\alpha \quad \hat{x}^\alpha \text{ vecteur unitaire en direction } \alpha \quad (79)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^d \frac{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)}{dx_i^\alpha} \frac{df(x_i^\alpha - x_j^\alpha)}{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)} \hat{x}^\alpha \quad (80)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^d \frac{df(x_i^\alpha - x_j^\alpha)}{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)} \hat{x}^\alpha = \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} f(\vec{r}_{ij}) \quad (81)$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}_j} f(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} f\left(\{x_i^\alpha - x_j^\alpha\}_{\alpha=i}^d\right) \quad (82)$$

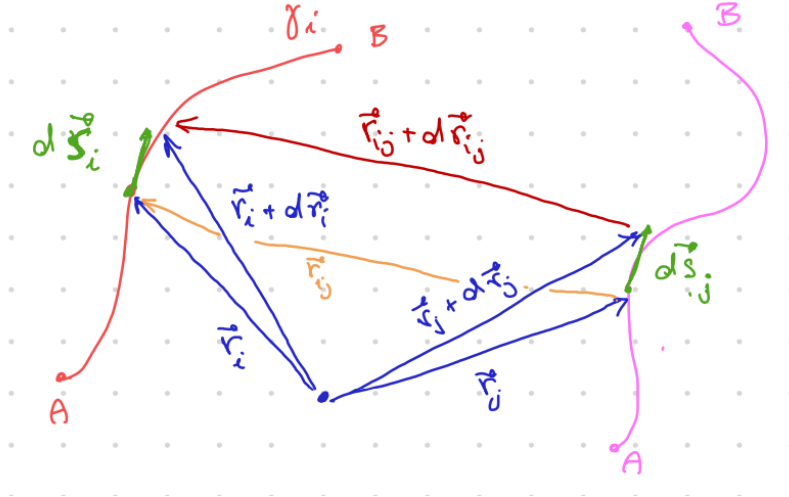
$$= \sum_{\alpha=1}^d \frac{d}{dx_j^\alpha} f(\{x_i^\alpha - x_j^\alpha\}) \cdot \hat{x}^\alpha \quad (83)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^d \frac{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)}{dx_j^\alpha} \frac{df(x_i^\alpha - x_j^\alpha)}{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)} \hat{x}^\alpha \quad (84)$$

$$= \underbrace{-}_{\text{signe !}} \sum_{\alpha=1}^d \frac{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)}{dx_j^\alpha} \frac{df(x_i^\alpha - x_j^\alpha)}{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)} \hat{x}^\alpha = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} f(\vec{r}_{ij}) \quad (85)$$

Donc

$$\int_{A, x_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} \vec{V}_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{s}_i + \int_{a, \gamma_j}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{s}_j = \int_{A, \gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{s}_i - \int_{A, \gamma_j}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{s}_j \quad (86)$$



On analyse les parcours γ_i et γ_j , $d\vec{s}_i$ et $d\vec{s}_j$

On a

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad (87)$$

$$\vec{r}_{ij} + d\vec{r}_{ij} = (\vec{r}_i + d\vec{r}_i) - (\vec{r}_j + d\vec{r}_j) = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) \quad (88)$$

$$\Rightarrow d\vec{r}_{ij} = d\vec{r}_i - d\vec{r}_j = d\vec{s}_i - d\vec{s}_j \quad (89)$$

Et la courbe d'évolution de $\vec{r}_{ij}$ de A à B est γ_{ij} .

$$\int_{A,\gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{s}_i - \int_{A,\gamma_j}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{s}_j \quad (90)$$

$$= \int_{A,\gamma_{ij}}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{r}_{ij} = \int_{A,\gamma_{ij}}^B \frac{dV_{ij}}{ds_{ij}} ds_{ij} \quad (91)$$

$$= V_{ij}(\vec{r}_{ij,B}) - V_{ij}(\vec{r}_{ij,A}) \quad (92)$$

Si on remet tout ensemble (équation 65)

$$W_{AB,\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [V_{ij}(\vec{r}_{ij,A}) - V_{ij}(\vec{r}_{ij,B})] + \sum_i [V_i^{ext}(\vec{r}_{i,A}) - V_i^{ext}(\vec{r}_{i,B})] \quad (93)$$

$$= \underbrace{V_{tot}(\{\vec{r}_{i,A}\}) - V_{tot}(\{\vec{r}_{i,B}\})}_{\text{premier terme 72} \rightarrow \text{92}} + \underbrace{\sum_i [V_i^{ext}(\vec{r}_{i,A}) - V_i^{ext}(\vec{r}_{i,B})]}_{\text{deuxième terme 68} \rightarrow \text{70}} \quad \text{attention au signe} \quad (94)$$

$$\text{Où l'on a défini } V_{tot}(\{\vec{r}_i\}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij}(\vec{r}_{ij}) + \sum_i V_i^{ext}(\vec{r}_i) \quad (95)$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ vient du fait que l'on ne veut pas compter deux fois les V_{ij} , une fois pour i et une fois pour j.

Ici encore, on remarque que si les forces sont conservatives, le travail est indépendant du parcours γ .

Conservation de l'énergie mécanique Finalement, dans le cas à N particules, on encore une fois la conservation de l'énergie mécanique :

$$T_A + V_{tot,A} = T_B + V_{tot,B} \quad (96)$$

Résultats On s'arrête un moment pour discuter tous ces résultats :

1. L'impulsion totale d'un système de N particules est conservée si la troisième loi de Newton est valable (bien sur qu'elle l'est !)
2. Le moment cinétique totale est conservé si les forces entre les particules sont centrales (dirigées selon $\vec{r}_{ij}$)
3. L'énergie mécanique totale est conservé si les forces viennent d'un potentiel de la forme $V_{ij}(|\vec{r}_{ij}|)$

Alors on a remarqué que :

- $-\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) = +\vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}(\vec{r}_{ij})$
 $\Rightarrow \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \Rightarrow \text{troisième loi !!!}$
- Si V_{ij} dépende de $|\vec{r}_{ij}| = r_{ij}$, alors on peut développer un peu plus le gradient

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ij}(|\vec{r}_{ij}|) = \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(|\vec{r}_{ij}|) = \sum_{\alpha=1}^d \hat{x}_i^\alpha \frac{d|\vec{r}_{ij}|}{dx_{ij}^\alpha} \frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}} \quad (97)$$

$$= \underbrace{\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}}_{\text{indép. de } \alpha} \cdot \sum_{\alpha=1}^d \hat{x}_i^\alpha \frac{d}{dx_{ij}^\alpha} \sqrt{\sum_{\beta=1}^d (x_{ij}^\beta)^2} \quad (98)$$

$$= \frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}} \sum_{\alpha=1}^d \hat{x}_i^\alpha \frac{x_{ij}^\alpha}{\sqrt{\sum_{\beta=1}^d (x_{ij}^\beta)^2}} = \frac{\sum_{\alpha=1}^d x_{ij}^\alpha \hat{x}_i^\alpha}{r_{ij}} \frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}} \quad (99)$$

$$= \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}} = \hat{r}_{ij} \frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}} \quad (\text{dirigé selon } \vec{r}_{ij} !!) \quad (100)$$

Donc, la forme du potentiel $V_{ij}(|\vec{r}_{ij}|)$ mène automatiquement à la conservation simultanée de l'impulsion totale (et elle-même à la 3ème loi!), à la conservation du moment cinétique totale et à la conservation de l'énergie mécanique totale.

Symétries Donc on analyse un peu mieux cette structure $V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$

1. Dépend uniquement de la différence entre $\vec{r}_i$ et $\vec{r}_j$. Il est donc "invariant par translation" (une symétrie!) : si on ajoute un vecteur $\vec{a}$ à $\vec{r}_i$ et $\vec{r}_j$ on a $\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{a}$ et $\vec{r}'_j = \vec{r}_j + \vec{a}$.

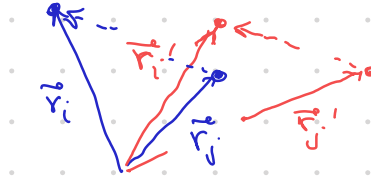


Figure 1: $\vec{r}'_i - \vec{r}'_j = \vec{r}_i - \vec{r}_j$

Cette partie donne la troisième loi de Newton et la conservation de l'impulsion totale

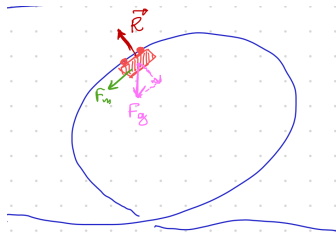
2. $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ ne dépend pas de l'orientation, donc est "invariant par rotation" (une symétrie !) et cette structure est responsable de la conservation du moment cinétique totale.

Donc on peut se poser la question : et si les symétries jouaient un rôle bien plus profond que ce que l'on est superficiellement en train de toucher. On va en rediscuter prochainement.

1.4 Problèmes avec la formulation newtonienne

Bien que les trois lois de Newton soient suffisantes pour résoudre n'importe quel problème, on peut facilement penser à des situations où l'application des lois de Newton telles que formulées par Newton (en particulier la deuxième) ne soit pas bien adaptée.

Les montagnes russes



Le chariot est contraint à bouger sur le rail, mais il est soumis à la force du moteur $\vec{F}_m$ et à la force de gravité $\vec{F}_g$.

Bien évidemment,

$$\vec{F}_m + \vec{F}_g = m\vec{a} \quad (101)$$

impliquerait une accélération avec composante orthogonale aux rails : le chariot tomberait !

Il n'arrive pas car les rails exercent une force qui compense exactement la composante orthogonale aux rails, $\vec{R}$. Donc finalement

$$\vec{a} = \frac{1}{m} (\vec{F}_m + \vec{F}_g + \vec{R}) \quad (102)$$

sera exactement tangent, localement, aux rails.

Le problème ici afin d'appliquer $\vec{F} = m\vec{a}$ est qu'il faut calculer $\vec{R}$ à chaque instant ! Pas du tout pratique !

Le formalisme de Lagrange vise justement à dépasser ce problème.

D'abord, il faut introduire le concept mathématique de contrainte.

1.5 Contraintes et coordonnées généralisées

Contrainte : Une relation mathématique entre les positions des particules, leurs vitesses et le temps

$$f(\{\vec{r}_i\}, \{\vec{v}_i\}, t) = 0 \quad (103)$$

avec le jeu des positions $\{\vec{r}_i\}$ et le jeu des vitesses $\{\vec{v}_i\}$.

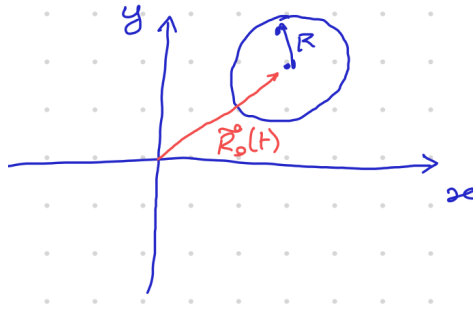
Dans ce cours on s'occupera seulement des contraintes dites : "holonomes", ou les vitesses n'apparaissent pas :

$$f(\{\vec{r}_i\}, t) = 0 \quad (104)$$

Aussi, on regarde seulement des contraintes qui sont exprimés comme égalités, et pas comme inégalités.

Exemple 1 :

Particule en 2D qui bouge sur un cercle de rayon R , centré en $\vec{R}_0(t)$, qui change dans le temps



$$f(x, y, t) = 0 \Rightarrow (x - X_0(t))^2 + (y - Y_0(t))^2 - R^2 = 0 \quad \vec{R}_0(t) = \begin{bmatrix} X_0(t) \\ Y_0(t) \end{bmatrix} \quad (105)$$

Exemple 2 :

Plus compliqué, deux particules en 3D dont une bouge sur un cylindre centré à l'origine, avec pour axe l'axe z , et de rayon R ; la deuxième particule n'a de contrainte en soi, mais la distance entre les deux particules est fixée à l .

Contraintes (plusieurs):

$$1. \quad x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0 \quad (\text{première particule}) \quad (106)$$

$$2. \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0 \quad (107)$$

Du deuxième exemple on voit tout de suite qu'on peut avoir plusieurs contraintes pour un système

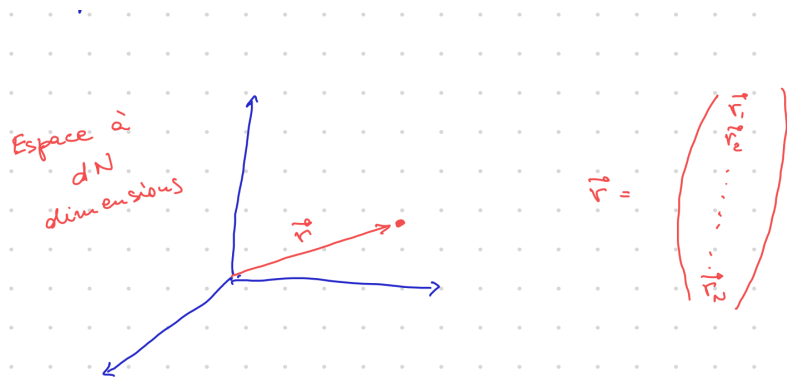
$$\{f_j(\{\vec{r}_i\}, t)\}_{j=1}^k \quad (108)$$

Degrés de liberté et coordonnées généralisées

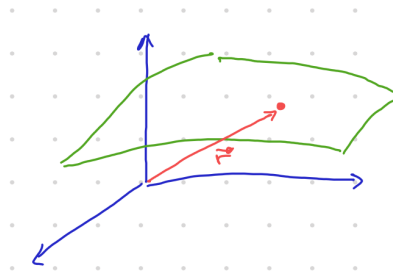
Avant de continuer, il est bien de poser l'attention sur le nombre de degrés de liberté d'un système.

Un système de N particules en d -dimensions à $d \cdot N$ degrés de liberté, correspondant aux $d \cdot N$ coordonnées. Chaque contrainte réduit le nombre de degré de liberté à $d \cdot N - k$. Les contraintes peuvent être utilisés directement pour exprimer les $d \cdot N - k$ degrés de liberté par biais des "coordonnées généralisées" $\{q_j\}_{j=1}^{dN-k}$.

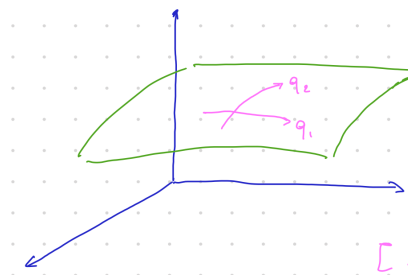
Pour mieux comprendre il est bien de regarder le système comme un point en $d \cdot N$ dimensions



Une contrainte $f(\{\vec{r}_i\}, t) = 0$ est une surface (ou "hypersurface", "variété", etc) dans cet espace.



On peut paramétrer cette surface par biais d'un système de coordonnées



(Attention : q_1 et q_2 pour simplicité ! c'est un exemple !)

Avec la formule de la contrainte, ces coordonnées définissent de façon unique les points sur la surface.

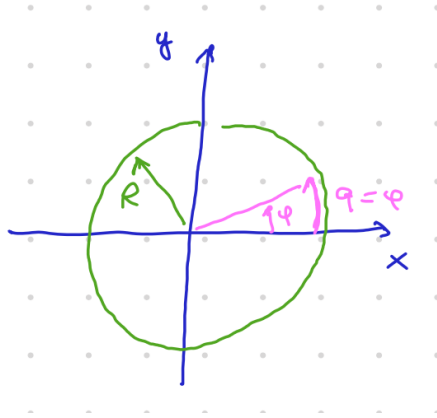
Donc on peut exprimer

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\{q_j\}, t) \quad (109)$$

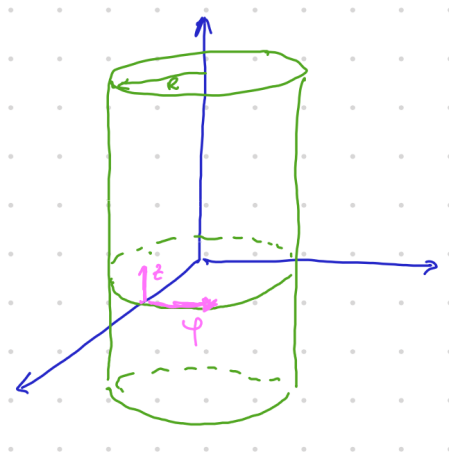
On regarde un exemple :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{matrix} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{matrix} \quad \text{et donc} \quad \vec{r} = \vec{r}(\phi) \quad (110)$$

où ϕ est la coordonnée généralisée.



Plus compliqué :



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} z \longrightarrow z \\ x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}(z, \phi) \quad (111)$$

On voit ici que les coordonnées euclidiennes sont des longueurs, mais les coordonnées généralisées peuvent avoir des unités de mesure différentes.

Plus en générale : chaque contrainte définit une surface à $dN - 1$ dimensions dans l'espace à dN dimensions. Le système doit satisfaire toutes les contraintes, et donc il évolue à l'intersection de toutes les surfaces, qui est une surface $dN - k$ dimensions (si on a k contraintes) dont la paramétrisation est donnée par $dN - k$ coordonnées généralisées $\{q_j\}_{j=1}^{dN-k}$

2 Formalisme de Lagrange

Avec son ouvrage "mécanique Analytique" (1788), le turinois Joseph-Louis Lagrange a posé la fondation de toute la reformulation mathématique de la mécanique. Bien que son but était la mécanique des fluides, il est plus pédagogique d'introduire son approche par biais des contraintes.

Comme dans le cas de la force de la contrainte pour un chariot sur les montagnes russes, en présence de plusieurs contraintes, il faut les forces de contrainte, à calculer "on the fly".

Donc Lagrange se pose la question: peut-on se débarrasser des forces de contraintes ?

2.1 déplacement virtuel

Intuitivement : si on pouvait se focaliser seulement sur le mouvement localement tangent à la surface définie par les contraintes (donc à $dN - k$ dimensions), on pourrait négliger toutes les forces qui sont orthogonales.

Observation supplémentaire : Les forces de contraintes "ne travaillent pas", car elles sont toujours orthogonales au déplacement.

Donc la première chose à faire est de définir les déplacements possibles sur la surface des contraintes, qu'on appelle "déplacement virtuel" (Ils sont virtuels car il ne sont pas nécessairement ceux que la trajectoire va suivre; ces derniers sont des cas particuliers), Les déplacements virtuels sont $\{\delta \vec{r}_i\}_{i=1}^N$ (pour les N particules). Le choix du jeu $\{\delta \vec{r}_i\}$ est arbitraire, pour autant qu'il satisfasse les contraintes.

On écrit la deuxième loi :

$$\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i - \vec{R}_i = 0 \quad \forall i \quad (112)$$

$\vec{R}_i$ est la force de contraintes sur la i -ème particule.

Maintenant on multiplie par $\delta \vec{r}_i$

$$(\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i - \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (113)$$

et on remarque que, par construction, $\delta \vec{r}_i \cdot \vec{R}_i = 0$, et donc

$$(\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (114)$$

Attention ! Les déplacements virtuels mélangent les coordonnées ! On a dN déplacements virtuels, mais seulement $dN - k$ degrés de liberté.

Donc la première chose à faire est de "perdre" l'identité des particules et de sommer sur i

$$\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (115)$$

Maintenant on va utiliser les coordonnées généralisées:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\{q_j\}, t) \quad (116)$$

donc

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{dN-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (117)$$

Ici on insiste sur la dérivée partielle car on pourrait avoir des dépendances pendant l'évolution du système. Avec la dérivée partielle, il est clair qu'on fait attention à la géométrie.

Donc

$$\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \quad (118)$$

$$= \sum_{j=1}^{dN-k} \left\{ \sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0 \quad (119)$$

L'astuce importante est que, la ou les $\{\delta\vec{r}_i\}$ étaient liés l'un l'autre, les $\{\delta q_j\}$ ne le sont pas car on peut les changer comme on veut : par construction ils sont une paramétrisation unique de la surface.

Il faut alors travailler un peu l'expression :

$$\left(\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (120)$$

Première partie :

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (121)$$

$$= \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \quad (122)$$

$$= \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] - \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)}_{\text{échange dérivées}} \quad (123)$$

On calcule la dérivée totale dans le temps de $\vec{r}_i$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_l \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (124)$$

Maintenant on prend la dérivée partielle par rapport à $\dot{q}_j$:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_l \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_l + \sum_l \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (125)$$

Ici on voit l'utilité des contraintes holonomes : $\{\vec{r}_i\}$ dépendent seulement de $\{q_j\}$ et pas de $\{\dot{q}_j\}$ et donc

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (126)$$

On reste alors avec

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_l \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{où} \quad \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = l \\ 0 & \text{si } j \neq l \end{cases} \quad (127)$$

δ_{jl} est le delta de Kroenecker.

A rappeler : on est en train de prendre les dérivées partielles, donc on dérive les "lettres" et donc $\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j} \neq 0$ seulement si $\dot{q}_l$ et $\dot{q}_j$ sont la même expression.

Finalement

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (128)$$

Et on revient sur l'expression d'origine

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left[\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] - \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \quad (129)$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) \quad (130)$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (131)$$

On s'occupe maintenant de la deuxième partie, avec les forces :

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = Q_j \quad (132)$$

Q_j est appelée force généralisée et, si on ne sait rien d'autre, elle reste de cette forme.

Enfin :

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \quad (133)$$

Cette expression est toujours $= 0$, car elle est une identité par construction.

Mais comme on a dit, $\{q_j\}$ sont arbitraires. Donc leur combinaison linéaire est identiquement nulle, seulement si leurs coefficients sont identiquement nuls.

Donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad \forall j \quad (134)$$

Il s'agit de $dN - k$ équations différentiels. On peut quand même avancer un peu plus si on considère le cas de forces conservatives

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V \quad (135)$$

Dans ce cas

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \underbrace{\sum_i \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{\text{dérivée en chaîne}} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (136)$$

et donc l'équation devient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (137)$$

2.2 Equations de Lagrange

On définit le Lagrangien du système

$$\boxed{L = T - V} \quad (138)$$

et on écrit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (139)$$

On peut avoir deux cas d'intérêt :

$$1. \text{ V ne dépend pas de } \dot{q}_j \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

alors on peut soustraire $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$ et on a

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \quad \text{Equations de Lagrange} \quad (140)$$

(bien évidemment la connaissance des conditions initiales est toujours nécessaire !)

2. On aboutit aux équations de Lagrange aussi dans un autre cas : si

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (141)$$

(le cas précédent étant un cas particulier)

On reviendra sur ce cas plus loin dans le cours.

On s'arrête pour faire le point :

Le passage au formalisme de Lagrange est exécuté de la façon suivante :

1. On trouve une bonne paramétrisation de l'espace accessible au système : on passe des coordonnées cartésiennes $\{\vec{r}_i\}$ aux coordonnées généralisées $\{q_j\}$.

Ce passage permet de se débarrasser des contraintes (qui sont implicitement tenues en compte) et par conséquence on se débarrasse aussi des forces des contraintes.

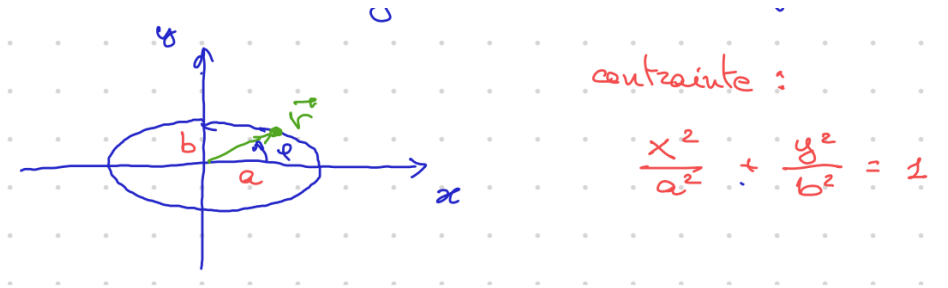
2. Il faut écrire le Lagrangien du système : $L = T - V$ en fonction des coordonnées généralisées $\{q_j\}$.

3. Il faut écrire l'équation de Lagrange associée à chaque q_j :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j \quad (142)$$

$$+ \text{condition initiales } \{q_j(0)\}, \{\dot{q}_j(0)\} \quad (143)$$

Exemple : Particule de masse m en 2D, contrainte à bouger sur une ellipse avec axes principales dirigées selon x et y , de longueur a et b respectivement



On passe aux coordonnées ellipsoidales :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \\ y &= b \sin \varphi \end{aligned} \Rightarrow \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1 \quad (144)$$

car elles satisfont la contrainte (si $a = b$ on obtient l'usuelle paramétrisation polaire.) φ est la coordonnée généralisée !

En suite on écrit l'énergie cinétique T :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \quad (145)$$

mais

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} &= b \dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \quad (146)$$

donc

$$T = \frac{1}{2} m (a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + b^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi) \quad (147)$$

Aucun potentiel a été défini, donc $L = T$

Finalement on peut écrire l'équation de Lagrange pour φ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (148)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} [2 \dot{\varphi} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)] - \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 [2a^2 - 2b^2] \sin \varphi \cos \varphi = 0 \quad (149)$$

et après quelques calculs :

$$\ddot{\varphi} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) + \dot{\varphi}^2 (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi = 0 \quad \underbrace{+ \varphi(0) \text{ et } \dot{\varphi}(0)}_{\text{conditions initiales}} \quad (150)$$

Que se passe-t-il si $a = b = R$?

$$L = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 \quad (151)$$

et l'équation de Lagrange devient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{=0} = 0 \quad \text{car } \varphi \text{ n'apparaît pas dans } L \quad (152)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m R^2 \dot{\varphi} = \ell_z \quad \leftarrow \text{moment cinétique ! en coordonnées polaires} \quad (153)$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \dot{\ell}_z = 0 \quad \ell_z \text{ est conservé !!!} \quad (154)$$

Mathématiquement évident : si φ n'apparaît pas dans le Lagrangien L , alors $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

Qui implique que $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0$

qui, à sa fois, implique que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} \quad \text{quantité conservée !!} \quad (155)$$

Une coordonnée qui n'apparaît pas dans le Lagrangien s'appelle coordonnée cyclique (Bien évidemment le vitesse généralisée associée doit apparaître).

2.3 variables cycliques

En définissant l'impulsion généralisée associée à une coordonnée généralisée q_j comme

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (156)$$

on a que, pour chaque coordonnée cyclique, l'impulsion généralisée associée est conservée

$$\dot{p}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{constante} \quad (157)$$

On regarde le concept de coordonnée cyclique un peu plus en profondeur :

$$L = L(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_M}_{q_j \text{ cyclique}}, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_M}_{\text{toutes les vitesses}}, t) \quad (158)$$

Si on ajoute une valeur quelconque à q_j , mais constante dans le temps, L ne change pas ! Il s'agit d'une symétrie "géométrique" du système. Donc encore une fois, on voit que l'existence de quantités conservées est intimement liée à la présence d'une symétrie.

Maintenant on se pose la question cruciale : est-ce que le formalisme de Lagrange s'applique seulement en présence d'une ou plusieurs contraintes ?

En Effet, non. Si on veut, on peut l'appliquer aussi en l'absence de contraintes (toute la dérivation n'en dépend pas !)

On peut donc regarder Lagrange d'une autre façon :

Le formalisme de Lagrange tout simplement nous fournit une méthode pour changer les variables dynamiques qu'on utilise pour décrire le système.

Les changements de variables de cartésiennes à polaire, cylindriques ou sphériques en sont des exemples.

Dans la même ligne de pensée, alors, on peut aussi appliquer Lagrange en coordonnées cartésiennes : On regarde le cas d'une seule particule en 3D, soumise à une potentiel externe $V(\vec{r})$

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}_T - V(x, y, z) \quad (159)$$

Et enfin

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{-F_x} = 0 \quad (160)$$

$m\dot{x} = p_x$ = impulsion associée à x , définie par $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, correspondant à la définition usuelle.

et donc

$$\dot{p}_x = F_x \quad \text{La deuxième loi !!!} \quad (161)$$

On peut aussi montrer que $\dot{p}_y = F_y$ et $\dot{p}_z = F_z$.

Donc, en coordonnées cartésiennes, les équations de Lagrange se réduisent à la deuxième loi. En effet le formalisme de Lagrange nous donne une forme de la deuxième loi plus universelle, qui est adaptée à n'importe quel changement de variables.

Il est aussi intéressant de remarquer que si une des coordonnées cartésiennes est cyclique, l'impulsion correspondante est conservée. Encore une fois, il s'agit d'une conservation associée à une symétrie.

2.4 Coordonnées normales

Le formalisme de Lagrange permet de changer de variables avec une procédure donnée :

$$\{\vec{r}_i\} \longrightarrow \{q_j\} \quad \Rightarrow \quad \{\vec{v}_i\} \rightarrow \{\dot{q}_j\} \quad (162)$$

et ensuite il faut écrire l'énergie cinétique et l'énergie potentielle par biais des $\{q_j\}$ et des $\{\dot{q}_j\}$

$$T(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) \quad \text{et} \quad V(\{q_j\}, t) \quad (163)$$

on écrit L :

$$L = T - V \quad (164)$$

et enfin on a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (165)$$

L'espoir est que si l'on choisit de bonnes coordonnées généralisées, les équations dynamiques seront faciles à résoudre. Le même esprit, même s'il n'est pas déclaré explicitement, s'applique au problème des coordonnées normales.

Pour commencer on définit le concept de point d'équilibre mécanique stable.

Si on a une particule dans un potentiel $V(\vec{r})$, le point d'équilibre mécanique stable est le minimum de l'énergie potentielle, à savoir $\vec{\nabla}_{\vec{r}} V = 0$ (qui identifie les extremums : minima, maxima et points de selle.)

Le minimum est ensuite le point extrême dont la matrice hessienne en d -dimension est définie positive

$$\underline{\underline{K}} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \cdots & & & \cdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial^2 V}{\partial x_d^2} \end{array} \right) \bigg|_{\vec{r}_{\text{extr}}} \quad (166)$$

où $\vec{r}_{\text{extr}}$ est calculée aux points extremum

Définie positive veut dire que

$$\frac{\vec{v}^\top \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \vec{v}}{\vec{v}^\top \cdot \vec{v}} > 0 \quad \forall \vec{v} \neq 0 \quad (167)$$

et que les valeurs propres de $\underline{\underline{K}}$ sont toutes positives.

Si on a un système composé par N particules, la généralisation est facile : il suffit de regarder le système en dN dimensions

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} V = 0 \quad \text{gradient en } dN \text{ dimensions} \Rightarrow \text{système de } dN \text{ équations} \quad (168)$$

$$\underline{\underline{k}} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_{dN}} \\ \cdots & & & \cdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_{dN} \partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial^2 V}{\partial x_{dN}^2} \end{array} \right) \bigg|_{\vec{r}_{\text{extr}}} \quad (169)$$

et on choisit le $\vec{r}_{\text{extr}}$ tel que $\underline{\underline{k}}$ est définie positive.

Petite note : On a un système composé par deux particules en 1D, qui sont reliées par un ressort de longueur à repos $l_0 = 0$

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \quad k > 0 \quad (170)$$

Donc, intuitivement le point d'équilibre stable est $x_2 = x_1$. (qui est un peu étrange !) on va mieux comprendre)

D'abord on cherche le point d'équilibre :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dx_1} = -k(x_2 - x_1) = 0 \\ \frac{dV}{dx_2} = k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (171)$$

Il est clair que $x_2 - x_1 = 0$ est solution, mais il nous dit pas où sont x_2 et x_1

On prend la matrice hessienne

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}_{x_1=x_2} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \quad (172)$$

On calcule les valeurs propres :

$$\begin{aligned} (k - \lambda)^2 - k^2 &= 0 \Rightarrow (k - \lambda)^2 = k^2 \\ \Rightarrow k - \lambda &= \pm k \\ \Rightarrow \lambda_+ &= 0 \\ \lambda_- &= 2k > 0 \end{aligned} \quad (173)$$

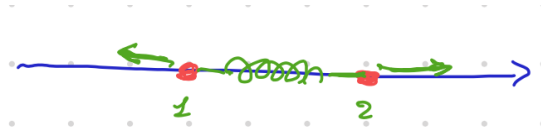
On cherche les vecteurs propres correspondantes :

$\vec{v}^-$:

$$(\underline{\underline{K}} - \lambda_- \underline{\underline{I}}) \vec{v}^- = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{pmatrix} = 0 \quad (174)$$

On a alors $v_1^- = -v_2^-$ (et on peut choisir $v_1^- = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $v_2^- = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ si on veut que $(\vec{v}^-)^\top \vec{v}^- = 1$)

Géométriquement il correspond à un déplacement opposé des deux particules



C'est donc le mouvement qui étire le ressort.

On cherche le vecteur propre correspondant à $\lambda_+ = 0$

$\vec{v}^+$:

$$(\underline{\underline{K}} - \lambda_+ \underline{\underline{I}}) \vec{v}^+ = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{pmatrix} = 0 \quad (175)$$

La solution est $v_1^+ = v_2^+$ (et on peut choisir $v_1^+ = v_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}$)



C'est un déplacement qui ne change pas la longueur du ressort : c'est une translation rigide.

Si on généralise à un système de N particules à d dimensions, on doit s'attendre à combien de valeurs propres nulles ?

d translations rigides $\rightarrow$ d valeurs propres nulles

$$d = 1 \rightarrow \text{pas de rotations} \Rightarrow \text{pas d'autres valeurs propres nulles} \quad (176)$$

$$d = 2 \rightarrow 1 \text{ rotation rigide} \Rightarrow 1 \text{ valeur propre nulle} \quad (177)$$

$$d = 3 \rightarrow 3 \text{ rotation rigide} \Rightarrow 3 \text{ valeurs propres nulles} \quad (178)$$

Donc en effet on peut s'attendre que $\underline{\underline{K}}$ soit semi-définie si le système n'est pas soumis à l'action de forces externes.

On peut revenir au problème originale du minimum du potentiel $V(\{r_i\}) = V(\vec{r})$. On le développe autour du minimum $\vec{r}_0$

$$V(\vec{r}) \simeq V(\vec{r}_0) + \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}} V}_{=0} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot \vec{r}_0 + \frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{r}_0)^\top \cdot \underline{\underline{K}} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + \dots \text{négligé} \quad (179)$$

et donc

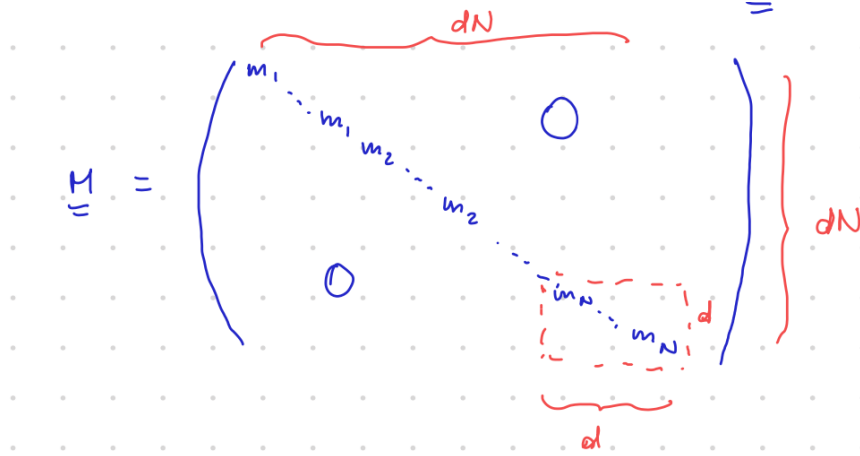
$$V(\vec{r}) \simeq \frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{r}_0)^\top \cdot \underline{\underline{K}} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (180)$$

Le terme $V(\vec{r}_0)$ est une constante qui ne contribue pas aux équations, qui impliquent des dérivées.

On peut donc écrire aussi l'énergie cinétique ($\vec{v} = \dot{\vec{r}}$):

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \vec{v}^\top \underline{\underline{M}} \vec{v} \quad (181)$$

Où on a introduit la matrice des masses $\underline{\underline{M}}$ of $dN \times dN$



et on peut directement écrire les équations de Lagrange en sachant que

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^\top \underline{\underline{M}} \dot{\vec{r}} - \frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{r}_0)^\top \underline{\underline{K}} (\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (182)$$

Equation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, dN \quad (183)$$

Où x_i est la i -ème composante du vecteur $\vec{r}$ (à dN dimensions)

Qui est, explicitement

$$m_i \ddot{x}_i - \sum_j K_{ij} (x_j - x_{j0}) = 0 \quad (184)$$

Structurellement, cette équation ressemble à celle d'un oscillateur harmonique, mais en effet elle est (elles sont!) plus compliquée !

En effet, il s'agit de dN oscillateurs harmoniques couplés entre eux : on doit résoudre les équations toutes ensemble.

On réécrit les équations sous forme matricielle :

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\vec{r}} - \underline{\underline{K}}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad (185)$$

On change de variable $\vec{y} = \vec{r} - \vec{r}_0$, avec $\dot{\vec{y}} = \dot{\vec{r}}$ et $\ddot{\vec{y}} = \ddot{\vec{r}}$

Donc

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\vec{y}} - \underline{\underline{K}}\vec{y} = 0 \quad (186)$$

On multiplie toute l'équation par $\underline{\underline{M}}^{-1}$ ($\underline{\underline{M}}^{-1}$ existe car toutes les masses sont > 0)

$$\ddot{\vec{y}} - \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}\vec{y} = 0 \quad (187)$$

Maintenant on va diagonaliser la matrice $\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}$: on cherche les vecteurs et valeurs propres : ω_k^2 et $\vec{z}_k$ tel que :

$$\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}\vec{z}_k = \omega_k^2\vec{z}_k \quad (188)$$

Qu'est-ce qu'on peut dire des valeurs propres de $\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}$?

On peut réécrire l'équation comme

$$\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{K}}\vec{z}_k = \omega_k^2\underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}}\vec{z}_k \quad \text{où } \underline{\underline{M}}^{\pm\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} m_1^{\pm\frac{1}{2}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_N^{\pm\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (189)$$

en suite on sait que $\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{I}}$ et donc

$$\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{K}}\vec{z}_k = \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{K}}\underbrace{\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}}}_{\underline{\underline{I}}}\vec{z}_k = \omega_k^2\underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}}\vec{z}_k \quad (190)$$

Si l'on pose $\vec{u}_k = \underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}}\vec{z}_k$ et $\hat{\underline{\underline{K}}} = \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{K}}\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}$

$$\hat{\underline{\underline{K}}}\vec{u}_k = \omega_k^2\vec{u}_k \quad (191)$$

Donc $\hat{\underline{\underline{K}}}$ et $\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\underline{K}}\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}$ ont les mêmes valeurs propres.

Mais $\hat{\underline{\underline{K}}}$ est symétrique, car $\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}$ est diagonale et $\underline{\underline{K}}$ est symétrique, donc les valeurs propres de $\hat{\underline{\underline{K}}}$ sont réels

Est-ce que les valeurs propres de $\hat{\underline{\underline{K}}}$ sont toutes positives ou nulles ?

- si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sont les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres nulles, alors

$$\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}\vec{v}_j = 0 \cdot \vec{v}_j \quad j = 1, \dots, n \quad (192)$$

et $\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}$ a le même nombre de valeurs propres nulles que $\underline{\underline{K}}$, avec les mêmes vecteurs propres.

- Si on prend un vecteur quelconque $\vec{s}$ (pas un de ceux à valeurs propre nulle) on a

$$\frac{\vec{s}^\top \cdot \hat{\underline{\underline{K}}} \cdot \vec{s}}{\vec{s}^\top \cdot \vec{s}} = \frac{[\vec{s}^\top \cdot \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}] \cdot \underline{\underline{K}} \cdot [\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}} \cdot \vec{s}]}{\vec{s}^\top \cdot \vec{s}} \quad (193)$$

$$= \frac{[\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\vec{s}]^\top \cdot \underline{\underline{K}} \cdot [\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\vec{s}]}{[\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\vec{s}]^\top [\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\vec{s}]} \cdot \frac{[\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\vec{s}]^\top [\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\vec{s}]}{\vec{s}^\top \cdot \vec{s}} \quad (194)$$

$$= \underbrace{\frac{[\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\vec{s}]^\top \cdot \underline{\underline{K}} \cdot [\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\vec{s}]}{[\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\vec{s}]^\top [\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}\vec{s}]}}_{>0 \underline{\underline{K}} \text{ semi-def positive}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{s}^\top \underline{\underline{M}}^{-1} \vec{s}}{\vec{s}^\top \cdot \vec{s}}}_{>0 \underline{\underline{M}}^{-1} \text{ def positive}} > 0 \quad (195)$$

Donc aussi $\underline{\underline{\hat{K}}}$ est semi définie positive. Donc les valeurs propres de $\underline{\underline{\hat{K}}}$ sont positives ou nulles, et $\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}$ a les mêmes valeurs propres, que l'on peut donc exprimer comme des carrés, ω_k^2 .

On revient alors à l'équation

$$\ddot{\vec{y}} - \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}\vec{y} = 0 \quad (196)$$

On écrit $\vec{y}(t)$ comme une combinaison linéaire des vecteurs propres de $\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}$

$$\vec{y}(t) = \sum_k Q_k(t) \vec{z}_k \quad (197)$$

et on peut le faire car ils sont une base complète. Alors, en substituant à la place de $\vec{y}$, on a :

$$\ddot{\vec{y}} = \sum_k \ddot{Q}_k \vec{z}_k \quad \text{et} \quad (198)$$

$$\sum_k \ddot{Q}_k \vec{z}_k - \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}} \sum_k Q_k \vec{z}_k = 0 \quad (199)$$

$$\sum_k \ddot{Q}_k \vec{z}_k - \sum_k Q_k \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}} \vec{z}_k = 0 \quad (200)$$

$$\sum_k \ddot{Q}_k \vec{z}_k - \sum_k Q_k \omega_k^2 \vec{z}_k = 0 \quad (201)$$

$$\Rightarrow \sum_k \left[\ddot{Q}_k - \omega_k^2 Q_k \right] \vec{z}_k = 0 \quad (202)$$

Puisque les $\vec{z}_k$ sont linéairement indépendant, cette identité est réalisée seulement si leurs coefficients sont tous nuls :

$$\ddot{Q}_k - \omega_k^2 Q_k = 0 \quad (203)$$

On a décomposé le système comme s'il était composé de dN oscillateurs harmoniques indépendants. Les $\{Q_k\}$ sont les "coordonnées normales".

On revient en arrière et on écrit le Lagrangien du système :

$$L = T - V = \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^\top \underline{\underline{M}} \dot{\vec{y}} - \frac{1}{2} \vec{y}^\top \underline{\underline{K}} \vec{y} \quad (204)$$

On utilise l'expression

$$\vec{y} = \sum_k Q_k \vec{z}_k \quad \dot{\vec{y}} = \sum_k \dot{Q}_k \vec{z}_k \quad (205)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \sum_{kk'} \dot{Q}_k \dot{Q}_{k'} \vec{z}_k^\top \underline{\underline{M}} \vec{z}_{k'} - \frac{1}{2} \sum_{kk'} Q_k Q_{k'} \vec{z}_k^\top \underline{\underline{K}} \vec{z}_{k'} \quad (206)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{kk'} \dot{Q}_k \dot{Q}_{k'} (\vec{z}_k^\top \underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}}) (\underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}} \vec{z}_{k'}) - \frac{1}{2} \sum_{kk'} Q_k Q_{k'} \underbrace{(\vec{z}_k^\top \underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}})}_{\underline{\underline{I}}} \underbrace{(\underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}})}_{\underline{\underline{I}}} (\underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}} \vec{z}_{k'}) \quad (207)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{kk'} \dot{Q}_k \dot{Q}_{k'} \vec{u}_k^\top \cdot \vec{u}_{k'} - \frac{1}{2} \sum_{kk'} Q_k Q_{k'} \vec{u}_k^\top \underline{\underline{K}} \vec{u}_{k'} \quad (208)$$

Maintenant on se rappelle que $\underline{\underline{K}}$ est symétrique et que donc ses vecteurs propres sont orthogonaux ("normales"):

$$\vec{u}_{k'}^\top \cdot \vec{u}_k = \delta_{kk'} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = k' \\ 0 & \text{si } k \neq k' \end{cases} \quad (209)$$

Au final :

$$L = \sum_k \left[\frac{1}{2} \dot{Q}_k^2 - \frac{1}{2} \omega_k^2 Q_k^2 \right] = \sum_k L_k \quad (210)$$

On a décomposé le Lagrangien dans la somme de Lagrangiens indépendants.

qui sont les coordonnées normales correspondantes aux valeurs propres nulles ?

$$\ddot{Q}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_k = \text{const conservée!} \quad (211)$$

Dans l'exemple donné auparavant, on avait que c'était des translations et des rotations. En effet :

$$\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \vec{z}_k = 0 \quad (212)$$

Mais si $\vec{z}_k$ est vecteur propre de $\underline{\underline{K}}$ associé à une valeur propre nulle, alors c'est aussi un vecteur propre de $\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}$; toujours avec valeurs propre nulle.

Donc l'argument utilisé pour $\underline{\underline{K}}$ se porte sur $\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}$.

De plus

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial y_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_N} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial y_N} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial z_N} \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \quad (213)$$

On l'a écrit en 3D pour l'exemple, mais on peut facilement généraliser à d dimensions.

Donc si on prend le vecteur

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (214)$$

on a

$$(\underline{\underline{K}} \vec{z})_j = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} \right)_{\vec{r}_0} \quad (215)$$

Exemple: On va traiter cette expression par biais d'un exemple : 3 particules

$$V = V_{12} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + V_{13} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + V_{23} (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \quad (216)$$

On choisit $j = 1$ et on a

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_1} = \underbrace{\frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 V_{13}}{\partial x_1 \partial x_1}}_{i=1} + \overbrace{\frac{\partial^2 V_{23}}{\partial x_1 \partial x_1}}^{=0} \quad (217)$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} + \overbrace{\frac{\partial^2 V_{13}}{\partial x_2 \partial x_1}}^{=0} + \overbrace{\frac{\partial^2 V_{23}}{\partial x_2 \partial x_1}}^{=0}}_{i=2} \quad (218)$$

$$+ \underbrace{\overbrace{\frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x_3 \partial x_1}}^{=0} + \frac{\partial^2 V_{13}}{\partial x_3 \partial x_1} + \overbrace{\frac{\partial^2 V_{23}}{\partial x_3 \partial x_1}}^{=0}}_{i=3} \quad (219)$$

Où les termes ne dépendant pas des variables de dérivation sont égal à zéro. ($\frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x_3 \partial x_1}$ ne dépend pas de x_3)

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_1} = \frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_{13}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 V_{13}}{\partial x_3 \partial x_1} \quad (220)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{12}}{\partial x_2} \right)}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{\partial V_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{13}}{\partial x_3} \right)}_{=0} \right] \quad (221)$$

$V_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad V_{13}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)$

et ils sont nuls $\forall \vec{r}$, pas seulement en $\vec{r}_0$

Donc si on généralise à N particules, on a que

$$\underline{\underline{K}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (222)$$

mais ce vecteur est une translation en direction de x de toutes les particules.

On répète pour chacune des autres directions et on voit donc que les coordonnées normales qui correspondent aux translations en effet disent que l'impulsion totale est conservée et que le système bouge d'un mouvement rectiligne uniforme.

On peut montrer aussi par un argument similaire s'applique aussi pour les rotations, mais on ne marque pas ici sa dérivation.

A quoi servent-elles, ces coordonnées normales ?

D'un coté, clairement elle rendent la solution du système plus facile car elle sont découplées les unes aux autres. Ce sont des simples oscillateurs harmoniques.

D'un autre coté, elles offrent une façon d'examiner expérimentalement un système !

Si on l'excite avec une perturbation périodique de pulsation ω , si ω correspond à une des fréquences propres, alors on le système entre en résonance. Donc, si on peut choisir ω , on la change pour trouver toutes les fréquences de résonance, dont le nombre et les valeurs vont permettre de reconstruire le structure du système.

Plusieurs moyens sont possibles : laser, neutrons, électrons etc... Toutes ces méthodes à la base utilisent la décomposition en coordonnées normales.

2.5 Calcul des variations

Le formalisme de Lagrange qu'on vient de développer est une conséquence des lois de Newton. On va maintenant montre qu'on peut les dériver à partir d'une formulation complètement différente. Pour le faire, il faut introduire le calcul des variations.

Il faut d'abord définir le concept de "fonctionnelle". Une fonction est une opération qui prend un nombre en $\mathbb{R}^n$ et le transforme en $\mathbb{R}$: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (bien évidemment on ne doit pas se limiter à $\mathbb{R}$), mais on le fait par simplicité). L'argument d'une fonction est un nombre.

Une fonctionnelle est une opération qui prend une fonction et la transforme en $\mathbb{R}$: $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Un exemple typique est

$$I[f] = \int_a^b F(f, f', f'', \dots, x) dx \quad (223)$$

Où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($f(x)$)

L'argument de I est donc une fonction, et pour chaque choix de la fonction, I prend une valeur différent.

Par exemple :

$$F(f) = x f f' \quad (224)$$

Alors

$$I[f] = \int_0^1 F(f, f', x) dx \quad (225)$$

et

$$I[x] = \int_0^1 x \cdot x \cdot 1 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \quad (226)$$

$$I[x] = \int_0^1 x \cdot x^2 \cdot 2x dx = \frac{2}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{2}{5} \quad (227)$$

Note : Les fonctionnelles sont étudiées dans l'Analyse Fonctionnelle, une branche très belle et riche des mathématiques. Elle généralise l'analyse à des objets (arguments) qui sont des fonctions.

Quelle est la question à la base du calcul des variations ?

Soit donné la fonctionnelle $I[y]$, dont l'argument sont les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x)$ avec $x \in [a, b]$.

$$I[y] = \int_a^b F(y, y', x) dx \quad (228)$$

avec $y(a)$ et $y(b)$ fixées pour tous choix de y

$$\begin{cases} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases} \quad \forall y \quad (229)$$

Alors on cherche la fonction y qui minimise $I[y]$.

- Route formelle (voir notes sur le moodle): on utilise la dérivée fonctionnelle

$$\frac{\delta I}{\delta y} = 0 \quad \text{on utilise } \delta \text{ pour la dérivée fonctionnelle} \quad (230)$$

(en effet très similaire à l'analyse, après avoir définis ce qu'est la dérivée par rapport à une fonction.)

- On retourne à l'analyse.

Si on connaît la solution $\bar{y}(x)$, on peut écrire toutes les autres fonctions de la forme

$$y(x) = \bar{y}(x) + \alpha \eta(x) \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (231)$$

avec les conditions

$$\begin{cases} \eta(a) = 0 \\ \eta(b) = 0 \end{cases} \quad \text{car } y(x) \text{ et } \bar{y}(x) \text{ doivent satisfaire } \begin{cases} y(a) = \bar{y}(a) = y_a \\ y(b) = \bar{y}(b) = y_b \end{cases} \quad (232)$$

Alors, si $\eta(x)$ est arbitraire (sauf pour les conditions en a et b), la dérivée de I par rapport à α doit être nulle en $\alpha = 0$

En effet, pour chaque $\eta(x)$ donné,

$$I[y] = I[\eta; \alpha] = I(\alpha) \quad \text{est une fonction de } \alpha \quad (233)$$

$I[\eta; \alpha]$ dépend paramétriquement de α .

donc

$$I[y] = \int_a^b F(\bar{y} + \alpha \eta, \bar{y}' + \alpha \eta', x) dx \quad (234)$$

et

$$\frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad \forall \eta \quad (235)$$

On développe cette dernière expression :

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial(\bar{y} + \alpha\eta)} \cdot \frac{\partial(\bar{y} + \alpha\eta)}{\partial\alpha} + \frac{\partial F}{\partial(\bar{y}' + \alpha\eta')} \cdot \frac{\partial(\bar{y}' + \alpha\eta')}{\partial\alpha} \right\} \Big|_{\alpha=0} dx \quad (236)$$

$$= \int_a^b \left\{ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial\bar{y}}}_{\alpha=0} \eta + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'}}_{\alpha=0} \eta' \right\} dx \quad (237)$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\bar{y}} \eta dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\bar{y}'} \cdot \eta' dx \quad (238)$$

Et on travaille par parties sur la deuxième intégrale

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial\bar{y}} \eta dx + \left\{ \frac{\partial F}{\partial\bar{y}'} \eta \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'} \right) \cdot \eta dx \right\} \quad (239)$$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial\bar{y}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'} \right) \right\} \eta dx + \frac{\partial F}{\partial\bar{y}'} \eta \Big|_a^b \quad (240)$$

mais $\eta(a) = \eta(b) = 0$ et donc le dernier terme est nulle.

Finalement

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = - \int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'} \right) - \frac{\partial F}{\partial\bar{y}} \right\} \eta dx = 0 \quad (241)$$

$$\text{car on sait que } \left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (242)$$

D'autre côté, η est arbitraire, et donc cet intégrale est nulle pour n'importe quel choix de η seulement si

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'} \right) - \frac{\partial F}{\partial\bar{y}} = 0 \quad (243)$$

qui en réalité est une équation différentielle en $\bar{y}$. Autrement dit, l'hypothèse que $\bar{y}$ soit solution est consistante si elle satisfait cette équation, qui s'appelle l'équation d'Euler.

2.6 Principe de moindre action

A ce point l'analogie avec le formalisme de Lagrange est clair :

$$\begin{aligned} F &\longrightarrow L \\ y &\longrightarrow q \\ x &\longrightarrow t \end{aligned} \quad (244)$$

et on définit l'**ACTION** $S[q]$

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad \text{avec } \begin{cases} q(t_1) = a_1 \\ q(t_2) = a_2 \end{cases} \quad (245)$$

La fonction qui minimise S, et qui doit donc satisfaire l'équation de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (246)$$

est la trajectoire du système.

On dit alors que le système évolue selon une trajectoire qui minimise l'action selon le **PRINCIPE DE MOINDRE ACTION**

A noter : pour résoudre les équations de Lagrange, on posait les conditions initiales : $q(t_1)$ et $\dot{q}(t_1)$
 Dans la dérivation qui nous a mené au principe de moindre action et à l'équation de Euler-Lagrange, on a uniquement posé $q(t_1)$ et $q(t_2)$ (aucune condition sur la dérivée).
 Il est important de marquer le fait que l'équation différentielle peut être résolue avec les deux types de conditions.

Extension à plusieurs degrés de liberté $\{q_j\}$ On définit, comme précédemment :

$$\begin{aligned} z_j &= q_j + \alpha \eta_j \\ \text{avec } \eta_j(t_1) &= \eta_j(t_2) = 0 \quad \forall j \quad \text{car } z_j(t_1) = q_j(t_1) = q_{j1} \text{ et } z_j(t_2) = q_j(t_2) = q_{j2} \end{aligned} \quad (247)$$

Où q_j est la solution recherchée

Alors

$$S[\{z_j\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_j + \alpha \eta_j\}, \{\dot{q}_j + \alpha \dot{\eta}_j\}, t) dt \quad (248)$$

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} \eta_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{\eta}_j \right\} dt = 0 \quad (249)$$

On intègre par partie le terme en $\dot{\eta}_j$ et on obtient

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \eta_j dt + \underbrace{\sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \eta_j \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ car } \eta_j(t_1)=\eta_j(t_2)=0} \quad (250)$$

Puisque les η_j sont arbitraires, alors il est nécessaire que chaque terme soit nul et on aboutit encore aux équations de Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j \quad (251)$$

2.7 Invariance de Jauge et Principe de moindre action

Le principe de moindre action permet de découvrir que le Lagrangien n'est pas défini de façon unique. En effet, on peut lui ajouter la dérivée totale d'une fonction ne dépendant que de $\{q_j\}$ et du temps, mais pas des vitesses généralisées, et on obtient exactement les mêmes équations :

$$L'(\{a_j\}, \{q_j\}, t) = L(\{a_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) + \frac{dF(\{q_j\}, t)}{dt} \quad (252)$$

Alors

$$S'[\{z\}] = \int_{t_1}^{t_2} L'(\{z_j\}, \{\dot{z}_j\}, t) dt = \quad (253)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(\{z_j\}, \{\dot{z}_j\}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(\{z_j\}, t)}{dt} dt = \quad (254)$$

$$= S[\{z_j\}] + \underbrace{F(\{q_j(t_2)\}, t) - F(\{q_j(t_1)\}, t)}_{\substack{\text{indép. de } \alpha \\ \eta_j(t_1) = \eta_j(t_2) = 0}} \quad (255)$$

Donc à la fin

$$\frac{dS'[\{z_j\}]}{d\alpha} = \frac{dS[\{z_j\}]}{d\alpha} \quad (256)$$

qui engendre les mêmes équations.

2.8 dérivée fonctionnelle

Une fonctionnelle associe un nombre à une fonction :

$$I[f] \in \mathbb{R} \quad (257)$$

(Il se pourrait que l'ensemble soit $\mathbb{C}$ et il pourrait associer un nombre à plusieurs fonctions : $I[\{f_i\}]$)

Un exemple est l'action

$$S[\{q_i\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t') dt' \quad (258)$$

avec $\{q_i(t_1)\}$ et $\{q_i(t_2)\}$ fixés. $L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t')$ est le Lagrangien.

Le principe de moindre action nous dit qu'il faut minimiser l'action par rapport aux fonctions $\{q_i(t)\}$. Symboliquement on écrit :

$$\frac{\delta S}{\delta q_i(t)} = 0 \quad \forall i \quad \text{on dérive } S \text{ par rapport à } q_i \text{ évaluée en } t \quad (259)$$

et on l'appelle dérivée fonctionnelle.

Mais qu'est-ce qu'il signifie ??

On y arrive par étape. Si à la place de l'intégrale on avait une somme aux temps discrets $\{t_j\}$, on écrirait

$$S[\{q_{ij}\}] = \sum_j L(\{q_{ij}\}, t_j) \quad \text{et} \quad q_{ij} = q_i(t_j) \quad (260)$$

Ici on écrit par la dérivée car aux temps discrets elle est fonction des $\{q_{ij}\} : \frac{q_{ij+1} - q_{ij}}{t_{j+1} - t_j}$. $\{q_{ij}\}$ est une collection de variables indépendantes.

[N.B. elles sont indépendantes à cause de l'aspect arbitraire des fonctions $q_i(t)$; bien évidemment lorsque l'on trouve la solution du moindre action, elles vont être liées entre elles]

Donc, aux temps discrets, on peut penser à S comme à une fonction des variables indépendantes $\{q_{ij}\}$. On dérive maintenant par q_{lk} , donc la l -ième fonction évaluée au temps t_k .

$$\frac{dS}{dq_{lk}} = \frac{d}{dq_{lk}} \sum_j L(\{q_{ij}\}, t_j) \quad (261)$$

$$\underbrace{=}_{\text{dérivée en chaîne}} \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_{ij}} \underbrace{\frac{dq_{ij}}{dq_{lk}}}_{\delta_{il} \cdot \delta_{kj}} \right) = \frac{\partial L(\{q_{ik}\}, t_k)}{\partial q_{lk}} \quad (262)$$

Maintenant, on revient à la forme intégrale :

$$\frac{\delta S}{\delta q_l(t)} = \frac{\delta}{\delta q_l(t)} \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i(t')\}, \{\dot{q}_i(t')\}, t') dt' \quad (263)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta}{\delta q_l(t)} L(\{q_i(t')\}, \{\dot{q}_i(t')\}, t') dt' \quad (264)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i(t')} \frac{dq_i(t')}{dq_l(t)} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t')} \frac{d\dot{q}_i(t')}{dq_l(t)}}_{\text{on le traite par partie}} \right] dt' \quad (265)$$

$$\frac{d\dot{q}_i(t')}{dq_l(t)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dq_i(t')}{dq_l(t)} \right) \quad \text{On peut changer l'ordre de dérivation} \quad (266)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t')} \frac{d}{dt} \left(\frac{dq_i(t')}{dq_l(t)} \right) dt' = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t')} \right) \frac{dq_i(t')}{dq_l(t)} dt' + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t')} \frac{dq_i(t')}{dq_l(t)} \Big|_{t'=t_1}^{t'=t_2} \quad (267)$$

On remet tout ensemble et on a

$$\frac{\delta S}{\delta q_l(t)} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t')} \frac{dq_i(t')}{dq_l(t)} \Big|_{t'=t_1}^{t'=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left\{ \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t')} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i(t')} \right\} \frac{dq_i(t')}{dq_l(t)} dt' \quad (268)$$

$$\text{mais qu'est-ce que } \frac{dq_i(t')}{dq_l(t)} ?? \quad (269)$$

D'abord i doit être égal à 1, sinon q_i et q_l sont indépendants. Mais aussi $t' = t$, sinon $q_l(t)$ et $q_l(t')$ sont indépendants. Donc

$$\frac{dq_i(t')}{dq_l(t)} = \delta_{il} \underbrace{\delta(t-t')}_{\text{Dirac delta fonction}} \quad (270)$$

Attention, Dirac delta fonction est en faite une distribution, pas une fonction.

Donc on a :

$$\frac{\delta S}{\delta q_l(t)} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i(t')} \delta_{il} \delta(t-t') \Big|_{t'=t_1}^{t'=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left\{ \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t')} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i(t')} \right\} \delta_{il} \delta(t-t') dt' \quad (271)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q_l(t')} \delta(t-t') \Big|_{t'=t_1}^{t'=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l(t')} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l(t')} \right\} \delta(t-t') dt' \quad (272)$$

Ce passage a été fait en utilisant $\delta_{il} = \begin{cases} 1 & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases}$

Comment fonctionne le delta de Dirac ?

Dans une intégrale, elle marche comme la delta de Kroenecker dans une somme .

$$\sum_i f_i \delta_{il} = f_l \quad \Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} f(t') \delta(t-t') dt' = f(t) \quad (273)$$

Donc

$$\frac{\delta S}{\delta q_l(t)} = \frac{\partial L}{\partial q_l(t')} \delta(t-t') \Big|_{t'=t_1}^{t'=t_2} - \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l(t)} \right\} \quad (274)$$

$$\text{qu'est-ce que } \delta(t-t')|_{t'=t_1}^{t'=t_2} \text{ out } t' = t_2? \quad (275)$$

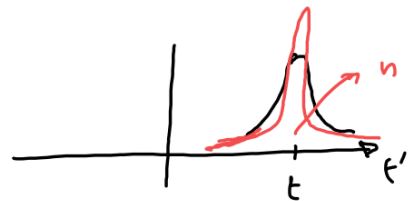
$$\text{rappelons que } \delta(t-t') = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t-t') \quad \text{Où } f_n(t-t') \text{ sont des fonctions} \quad (276)$$

Par exemple

$$f_n(t-t') = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{n}{2}(t-t')^2} \quad (277)$$

Il s'agit d'une séquence de fonctions de plus en plus étroites autour de t, mais toujours d'intégrale unitaire.

On peut facilement voir que



$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t-t') = \begin{cases} 0 & \text{si } t' \neq t \\ \infty & \text{si } t' = t \end{cases} = \delta(t-t') \quad (278)$$

$$\text{donc } \delta(t-t')|_{t'=t_1} = \delta(t-t')|_{t'=t_2} = 0 \quad \text{pour } t_1 < t < t_2 \quad (279)$$

[N.B. Attention, je suis en train de traiter $\delta(t-t')$ comme si elle était une fonction !]

Au final

$$\frac{\delta s}{\delta q_l(t)} = - \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l(t)} \right\} = 0 \quad (280)$$

ce qui est exactement l'équation d'Euler-Lagrange.

2.9 Moindre action et contraintes

Le principe de moindre action permet d'inclure dans le formalisme Lagrangien aussi des contraintes qui sont difficiles à traiter par coordonnées généralisées.

Rappel : théorème des extremums liés

Si on veut minimiser une fonction de plusieurs variables $f(x, y)$ soumise à une contrainte $g(x, y) = 0$ on minimise la fonction

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad \lambda \text{ multiplicateur de Lagrange} \quad (281)$$

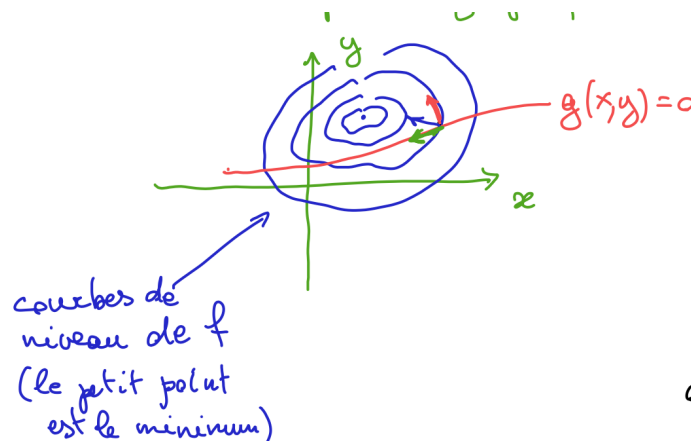
Donc on doit résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (282)$$

La solution des deux premières équations donne $x(\lambda)$ et $y(\lambda)$, que l'on insère dans la troisième pour trouver λ .

Pourquoi suit-on cette procédure ?

On le comprend plus aisément graphiquement :



Il faut chercher le minimum de f sur la courbe rouge. Le gradient de f est un vecteur $\perp$ aux courbes de niveau (flèche bleu). si on le suit on arrive au min de f .

Mais on sortirait de la courbe rouge. Donc il faut enlever la composante orthogonale à la courbe rouge (flèche rouge), dont la direction est donnée par le gradient de $g(x, y)$ (la courbe rouge est une courbe de niveau pour $g(x, y)$!). On ne connaît pas la longueur de la composante, mais sa

direction oui. Donc le vecteur vert, qui va vers le minimum tout en restant sur la courbe rouge, est

$$\vec{\nabla} f - \lambda \vec{\nabla} g \quad \lambda \text{ à déterminer} \quad (283)$$

ou autrement dit

$$\vec{\nabla}(f - \lambda g) = \vec{\nabla} f \quad (284)$$

Lorsque ce vecteur est nul, on est au minimum de f sur une courbe de niveau de g . Il faudra seulement s'assurer qu'on soit sur la bonne ($g = 0$), en fixant λ . Tout cela peut être généralisé au cas de plusieurs dimensions et multiples contraintes.

Disons qu'on ait les contraintes $f_j(\{\vec{r}_i\}, t) = 0 \quad j = 1, \dots, k$ étant tellement compliquées que l'on arrive pas à trouver des coordonnées généralisées.

Bien évidemment, si $f_j = 0$, alors $\lambda_j f_j = 0$ et aussi

$$\sum_j \lambda_j f_j(\{\vec{r}_i\}, t) = 0 \quad \text{ainsi que} \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \lambda_j f_j(\{\vec{r}_i\}, t) \right] dt = 0 \quad (285)$$

Donc on peut le considérer comme une contrainte et dire qu'il ne faut pas minimiser l'action S , mais la fonctionnelle

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} L(\{\vec{r}_i\}, \{\dot{\vec{r}}_i\}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\{\vec{r}_i\}, t) dt \quad (286)$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont ainsi :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial r_i} = 0 \quad (287)$$

En effet, il s'agit de la formulation originale du problème des contraintes : il faut à chaque instant enlever la composante de la force appliquée qui est normale à la contrainte. Ici on voit bien que, une fois les λ_j déterminés, la force de la contrainte pour la coordonnées r_i est $R_j = - \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial r_i}$.

Bien évidemment il faut être flexible : peut-être que certaines contraintes mènent à des coordonnées généralisées, et qu'il faut traiter les contraintes restante comme montré ci-dessus.

Aussi, dans certaines limites, on peut inclure des contraintes qui ne sont pas holonomes.

L'utilité de cette formulation, quand même, est qu'elle offre la possibilité de résoudre des problèmes où la contrainte apparaît déjà en forme intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} g(\{\vec{r}_i\}, t) dt \quad (288)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \lambda \int_{t_1}^{t_2} g(\{\vec{r}_i\}, t) dt \quad (289)$$

Important : Le calcul variationnel est très important, même avec contraintes intégrales. Exercices, Exercices, Exercices !!!

2.10 Invariance de jauge du Lagrangien

$$L' = L + \frac{dF(\{q_i\}, t)}{dt} \quad \text{pas de } \{\dot{q}_i\} \quad (290)$$

Invariance de jauge et les changement de référentiel (1D par simplicité)

$$\begin{cases} x = f(x', t') \\ t = t' \end{cases} \quad (291)$$

Le temps est absolu (il faut la relativité pour généraliser).

Si on croit qu'il y a une façon d'observer dans un référentiel et de traduire les observations dans un autre, il faut une relation mathématique entre les coordonnées.

Disons que

$$L(\{x_i\}, \{\dot{x}_i\}, t) = L\left(\{f(x'_i, t)\}, \left\{\frac{d}{dt}f(x'_i, t)\right\}, t\right) \quad (292)$$

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij} V(x_i - x_j) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\frac{d}{dt} f(x'_i, t) \right]^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij} V(f(x'_i, t) - f(x'_j, t)) \quad (293)$$

On va calculer explicitement la partie cinétique :

$$\left[\frac{d}{dt} f(x'_i, t) \right]^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial x'_i} \dot{x}'_i + \frac{\partial f}{\partial t} \right]^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x'_i} \right)^2 \dot{x}'_i{}^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x'_i} \frac{\partial f}{\partial t} \dot{x}'_i + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \quad (294)$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial x'_i} \right)^2 \dot{x}'_i{}^2 + 2 \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial x'_i} \frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial t} \dot{x}'_i + \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (295)$$

Rappelez vous la forme plus générale de la première loi de Newton : Les lois de la physique sont les mêmes dans différents référentiels. Se traduisant par : Le lagrangien est le même.

$$L(x'_i, \dot{x}'_i, t) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij} V(x'_i - x'_j) \quad (296)$$

Si on compare, on a que

$$\left(\frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial x'_i} \right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial x'_i} = \pm 1 \quad (297)$$

Donc

$$f(x'_i, t) = \pm x'_i + g(t) \quad (298)$$

La fonction $g(t)$ ne dépend que du temps, de sorte que sa dérivée par rapport à x' soit nulle.

Cette forme déjà comble la requête pour le potentiel :

$$V(f(x'_i, t) - f(x'_j, t)) = V(\pm x'_i + g(t) - (\pm x'_j + g(t))) = \quad (299)$$

$$= V(\pm (x'_i - x'_j)) \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{ne dépend pas de l'ordre}} \quad V(x'_i - x'_j) \quad (300)$$

On a encore à gérer le terme

$$2 \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial x'_i} \frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial t} \dot{x}'_i + \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial f(x'_i, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (301)$$

Et grâce à l'invariance de jauge, on sait que si ce terme est une dérivée totale par rapport au temps, il ne joue aucun rôle. En utilisant $f(x', t) = \pm x' + g(t)$, on a

$$\pm 2 \sum_i \frac{1}{2} m_i g'(t) \dot{x}'_i + \sum_i \frac{1}{2} m_i [g'(t)]^2 \quad g'(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad (302)$$

Le deuxième terme est une fonction ne dépendant uniquement du temps. Donc on peut toujours le voir comme dérivée totale de sa primitive $\sum_i \frac{1}{2} m_i [g'(t)]^2 = \frac{d}{dt} \int_0^t \sum_i \frac{1}{2} m_i [g'(t')]^2 dt'$ et il ne dépende pas de la forme de $g(t)$.

Le premier terme est plus compliqué à traiter. On regarde indépendamment de l'indice :

$$\dot{x}'_i \frac{dg(t)}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt} (g(t) x'_i)}_{\text{forme désirée}} - \underbrace{\frac{d^2 g(t)}{dt^2} \cdot x'_i}_{\text{terme dérangeant}} \quad (303)$$

Pour se débarrasser de ce second terme, il faut que $\frac{d^2 g}{dt^2} = 0$. Donnant $g(t) = vt + X_0$.

Si finalement on remet tout ensemble, on a

$$x = \underbrace{\pm x'}_{(1)} + \underbrace{X_0}_{(2)} + \underbrace{vt}_{(3)} \quad (304)$$

- (1) choix de l'orientation d'un réf. par rapport à l'autre
- (2) changement de l'origine d'un référentiel par rapport à l'autre
- (3) Déplacement relatif à vitesse constante

Il s'agit de référentiels galiléens l'un par rapport à l'autre ! Donc on voit la première loi de Newton : on demande que les lois soient les mêmes (même Lagrangien) et seulement les référentiels galiléens sont bons !

Observation : La linéarité de la transformation pour ce qui concerne les parties spatiales et temporelles garantie qu'un potentiel invariant par translation conserve la même forme.

2.11 Théorème de Noether

Définissons un changement de coordonnées généralisées ne dépendant qu'un seul paramètre .

$$q_i \longrightarrow q_i(s) \quad s \text{ paramètre} \quad (305)$$

La forme de la dépendance n'est pas importante.

Si le Lagrangien ne dépend pas de s , alors il y a une quantité conservée

$$C = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial s} \quad (306)$$

Pour le prouver, on utilise l'action :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i(s)\}, \{\dot{q}_i(s)\}, t) dt \quad \underbrace{=}_{L \text{ indép de } s} \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) dt \quad (307)$$

Donc, si on dérive par rapport à s , on

$$\frac{dS}{ds} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \frac{d\dot{q}_i(s)}{ds}}_{\text{par partie}} \right\} dt = \underbrace{\frac{d}{ds} \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) dt}_{=0 \text{ indép de } s} \quad (308)$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} \right) dt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \right) \frac{dq_i(s)}{ds} dt = 0 \quad (309)$$

On met ensemble les intégrales

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \underbrace{\left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i(s)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \right\}}_{=0 \text{ Eq. de Lagrange !}} \frac{dq_i(s)}{ds} dt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (310)$$

Donc, finalement, on a

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} \Big|_{t_2} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} \Big|_{t_1} = 0 \quad (311)$$

Autrement dit, vu que t_1 et t_2 sont arbitraires, on a que

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} \frac{dq_i(s)}{ds} \quad \text{est une constante !} \quad (312)$$

Exemples

- Coordonnées cyclique : si q_i est cyclique,

$$\begin{aligned} q_j &\rightarrow q_j & j \neq i \\ q_i &\rightarrow q_i + \alpha s \end{aligned} \quad (313)$$

(α sert à assurer les éventuelles unités de mesure, mais est une constante)

Cette transformation ne change pas le Lagrangien, et donc

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j(s)} \frac{dq_j}{ds} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j(s)} \delta_{ij} \cdot \alpha = \alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(s)} = \alpha (\dot{q}_i + \underbrace{\frac{d}{dt}(\alpha s)}_{=0}) = \alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (314)$$

est une quantité conservée, et puisque α est une constante, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ est une quantité conservée.

- Translation

$$\vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_i + s \hat{u} \quad \forall i \quad (315)$$

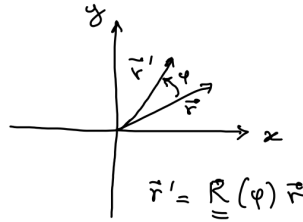
Toutes les coordonnées sont translatées dans la même direction $\hat{u}$ d'une quantité s

$$\Rightarrow C = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \frac{d\vec{r}_i(s)}{ds} = \sum_i m \dot{\vec{r}}_i \cdot \hat{u} = \vec{P} \cdot \hat{u} \quad (316)$$

Donc, si le Lagrangien est symétrique (ne change pas) par rapport à une translation dans la direction $\hat{u}$, alors la composante selon $\hat{u}$ de l'**impulsion totale** est conservée. Si on trouve trois directions indépendantes telles que Noether s'applique individuellement à chaque direction, alors $\vec{P}$ est conservé dans toutes ses composantes.

- Rotation dans le plan xy

$$\text{La matrice de rotation est} \quad \underline{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (317)$$



L ne dépend pas de φ si $V(\{\vec{r}_i\})$ représente des forces centrales et/ou les potentiels entre les particules dépendent seulement de leurs distances ($\underline{R}$ est orthogonale et donc ne change pas les distances : $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}'_i - \vec{r}'_j|$)

De plus,

$$\dot{\vec{r}}'_i = \underline{R} \dot{\vec{r}}_i \quad \text{et} \quad \dot{\vec{r}}_i^2 = \dot{\vec{r}}_i^T \cdot \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i^T \underbrace{\underline{R}^T \underline{R}}_{= \underline{I} \text{ car } \underline{R} \text{ ortho}} \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i^T \underline{R}^T \underline{R} \dot{\vec{r}}_i = \left(\dot{\vec{r}}_i^T(\varphi) \right)^2 \quad (318)$$

Donc l'énergie cinétique ne change pas suite à la rotation. Donc on peut appliquer le théorème de Noether par rapport à φ :

$$C = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}'_i} \frac{d\vec{r}'_i}{d\varphi} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i^T \underbrace{\underline{R}'}_{\frac{d}{d\varphi} \underline{R}(\varphi)}(\varphi) \vec{r}_i = \sum_i \dot{\vec{r}}_i^T \underline{R}^T \underline{R}' \vec{r}_i \quad (319)$$

$$\underline{R}^T \underline{R}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (320)$$

et donc

$$C = \sum_i \left\{ (\dot{x}_i, \dot{y}_i) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \right\} \quad (321)$$

$$= \sum_i (\dot{y}_i, -\dot{x}_i) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \sum_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \sum_i l_{zi} \quad (322)$$

$$= L_z \quad \text{moment cinétique totale autour de l'axe } z \quad (323)$$

Donc, la symétrie par rotation autour de l'axe z implique la conservation de la composante z du **moment cinétique** totale.

Conservation de l'hamiltonien pour un système isolé

Un système est dit isolé lorsque le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps.

NOTA : on a une symétrie par translation temporelle, donc par Noether on peut s'attendre à une quantité conservée. C'est le cas, mais passer par Noether est compliquée car le temps joue un rôle privilégié dans l'action. On va donc le montrer autrement.

On dérive L par rapport au temps

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0 \text{ système isolé}} \quad (324)$$

$$= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i \right\} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (325)$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \underbrace{\sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right\} \dot{q}_i}_{=0 \text{ Eq. de Lagrange}} \quad (326)$$

Donc

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0 \quad (327)$$

L'hamiltonien du système est défini comme

$$h = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad \text{et il est conservé pour un système isolé} \quad (328)$$

Qu'est-ce que l'hamiltonien ?

$$\text{En coordonnées cartésiennes} \quad L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 - V \quad (329)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m_i \dot{r}_i = \vec{p}_i \quad (330)$$

$$\Rightarrow h = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - V \right) = \quad (331)$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + V \quad (332)$$

$$\mathbf{h \text{ est l'énergie totale !}} \quad (333)$$

Techniquement, h n'est pas nécessairement l'énergie totale, mais en réalité il l'est le plus grand nombre de fois.

3 Formalisme de Hamilton

Lagrange nous enseigne comment traiter un changement de coordonnées $\{\vec{r}_i\} \rightarrow \{q_j\}$, avec l'espoir que ce changement va donner des équations dynamiques plus simples à résoudre.

Mais si on essaie d'aller plus loin, peut-être y a-t-il des changements de variables dynamiques qui simplifieront encore plus les équations. Peut-être ces changements mélangent vitesses et coordonnées.

Mais le formalisme de Lagrange n'est pas adapté pour ce type de changement. D'abord, il faut amener les vitesses au même plan formel que les coordonnées. Pour cela, il faut le formalisme de Hamilton.

3.1 Le formalisme de Hamilton

Pour rappel, les équations de Lagrange sont

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (334)$$

Comme elles sont équivalentes à la deuxième loi de Newton, elles sont des équations différentielles de deuxième ordre (impliquant la dérivée seconde). On peut essayer de les écrire comme jeu d'équations différentielles de première ordre. Pour chaque i , on a

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\ \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{cases} \quad \text{impulsion généralisée (c'est en fait une définition)} \quad (335)$$

Le problème de cette formulation est qu'elle n'est pas vraiment ce qu'on voulait : on aurait cherché plutôt

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dots \\ \dot{p}_i = \dots \end{cases} \quad \text{qui met en évidence la nature d'équation de première ordre et a une plus "belle" symétrie mathématique.} \quad (336)$$

Pour y arriver il faut passer par la transformation de Legendre.

3.2 Rappel sur la transformation de Legendre

Lorsque on a une relation entre x et y du type

$$x = f(y) \quad (337)$$

La relation $y = g(x)$ est trivialement comblée par $g = f^{-1}$, c'est à dire la fonction inverse. La transformation de Legendre est une façon tordue de faire la même chose, en passant par la dérivée :

$$x = \frac{df(y)}{dy} = f'(y) \quad (338)$$

et on cherche $g(x)$ telle que $y = \frac{dg(y)}{dy} = g'(y)$

Pour trouver $g(x)$ on procède ainsi :

1.

$$\begin{aligned} x = f'(y) &\rightarrow \text{on substitue } y = g'(x) \\ \Rightarrow x = f'(g'(x)) \end{aligned} \quad (339)$$

2. On multiplie à droite et à gauche par $g''(x)$

$$g''(x) \cdot x = f'(g'(x)) g''(x) \quad (340)$$

3. on reconnaît le terme de droite comme étant $\frac{d}{dx} [f(g'(x))] = f'(g'(x)) g''(x)$ et que celui de gauche est :

$$g''(x) \cdot x = \frac{d}{dx} (g'(x) \cdot x) - g'(x) \quad (341)$$

4. on a donc

$$\frac{d}{dx} (g'(x) \cdot x) - g'(x) = \frac{d}{dx} [f(g'(x))] \quad (342)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{d}{dx} [g'(x) \cdot x - f(g'(x))] \quad (343)$$

$$\Rightarrow g(x) = g'(x) \cdot x - f(g'(x)) \quad (344)$$

Exemple

$$x = y^2 = f'(y) \rightarrow \text{fonction inverse} \rightarrow y = \pm\sqrt{x} \quad (345)$$

Par biais de la transformation de Legendre on a

$$y = g'(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \underbrace{g'(x)}_y \cdot x - \underbrace{f(y(x))}_{\frac{1}{3}y^3 \text{ par intégration}} \quad (346)$$

Ici on triche un peu : par biais de la fonction inverse on sait que $y = \pm\sqrt{x}$, et on le substitue :

$$g(x) = \pm\sqrt{x} \cdot x - \frac{1}{3}(\pm\sqrt{x})^3 = \pm\frac{2}{3}x^{3/2} \quad (347)$$

et maintenant

$$y = g'(x) = \pm\sqrt{x} \quad \text{Tout est bien consistant!} \quad (348)$$

Attention : tous ces passages sont symboliques. Donc , en présence de plusieurs variables, on utilisera la dérivée partielle.

3.3 Equations d'Hamilton

On revient aux équations de la mécanique :

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q^i} \\ p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \end{cases} \quad \leftarrow \text{on utilise Legendre sur la deuxième} \quad (349)$$

On construit alors la fonction

$$H = p\dot{q} - L \quad (350)$$

c'est l'Hamiltonien qu'on avait déjà rencontré et qui est conservé si le système est isolé.

Analysons H :

$$H = p\dot{q}(p) - L(q, \dot{q}(p), t) \quad (351)$$

comme on a vu dans la dérivation de Legendre, il faut substituer à $\dot{q}$ son expression par biais de p . Donc

$$H = H(q, p, t) \quad \text{et non pas } \dot{q} \quad (352)$$

Bien évidemment, $H(q, p, t)$ et $h(q, \dot{q}, t)$ sont la même quantité physique, mais exprimées par différentes variables dynamiques.

Alors, à l'aide de la transformée de Legendre, on a

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (353)$$

D'un autre coté

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (354)$$

car $L = p \dot{q}(p) - H$ et

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}(p \dot{q}(p)) - \frac{\partial H}{\partial q} \quad (355)$$

$p \dot{q}(p)$ ne dépend uniquement de p après la substitution.

Finalement on a réécrit les équations de Lagrange comme

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad \text{Equations canoniques de Hamilton} \quad (356)$$

Question : est-ce qu'elles sont formellement symétriques ?

Réponse : Il y a le signe "-" devant une dérivée. On verra qu'on ne peut pas s'en débarrasser, mais ce signe est la conséquence d'une symétrie d'un type différent.

Généralisation à plusieurs degrés de liberté

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i(\{p_i\}) - L(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \quad (357)$$

et ensuite

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad \forall i \quad (358)$$

Exemple 1

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - V(\{q_i\}) \quad (359)$$

d'abord on calcule les impulsions généralisées

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i \implies \dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i} \quad (360)$$

donc

$$H = \sum_i p_i \overbrace{\left(\frac{p_i}{m_i} \right)}^{\dot{q}_i} - \left[\sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{p_i}{m_i} \right)^2 - V(\{q_i\}) \right] \quad (361)$$

$$= \sum_i \frac{p_i^2}{m_i} - \sum_i \frac{1}{2} \frac{p_i^2}{m_i} + V(\{q_i\}) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + V(\{q_i\}) \quad (362)$$

et les équations canoniques de Hamilton sont

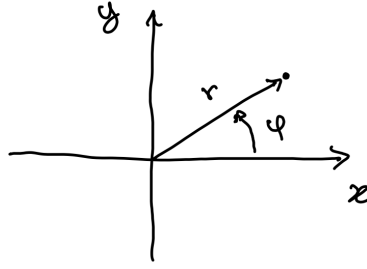
$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \end{cases} \quad (363)$$

$-\frac{\partial V}{\partial q_i}$ n'est rien d'autre que la force, donc on a la deuxième loi de Newton.

Exemple 2

Particule en 2d dans un potentiel centrale $V(r)$. On sait que la meilleure représentation pour le système est en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \quad (364)$$



$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2}) \Rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r) \quad (365)$$

$$\Rightarrow p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad (366)$$

$$\Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \quad (367)$$

On constate que $p_\varphi mr^2\dot{\varphi}$ est le moment cinétique.

Donc

$$H = p_r\dot{r} + \beta\dot{\varphi} - L = \quad (368)$$

$$= p_r \left(\frac{p_r}{m} \right) + p_\varphi \left(\frac{p_\varphi}{mr^2} \right) - \left[\frac{1}{2}m \left(\frac{p_r}{m} \right)^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{p_\varphi}{mr^2} \right)^2 - V(r) \right] \quad (369)$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) \quad (370)$$

Et finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \\ \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \text{définition elles-mêmes} \\ \rightarrow p_\varphi \text{ est conservé comme prévu } (\varphi \text{ cyclique}) \end{array} \quad (371)$$

On écrit les équations canoniques de Hamilton :

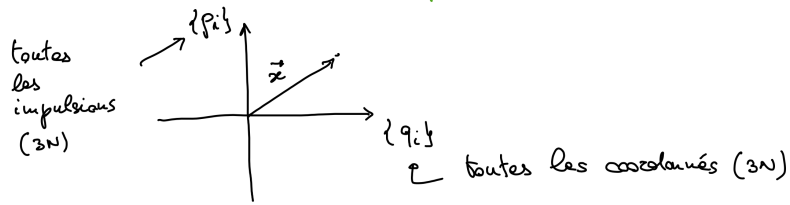
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right. \quad \forall i \quad (372)$$

On peut voir que l'on peut définir un vecteur à $6N$ composantes $\vec{x}$ ($6N$ car par simplicité, on travaille avec N particules en 3d; ce serait $4N$ en 2d et ainsi de suite)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{3N} \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{3N} \end{pmatrix} \quad \vec{x} \text{ décrit de façon complète l'état du système, car il donne position et impulsion de chaque particule} \quad (373)$$

L'état du système est donc un point dans un espace à $6N$ dimensions : l'espace de phase

On définit le gradient de H dans l'espace de phase



$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} H = \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_{3N}} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_{3N}} \end{pmatrix} \quad (374)$$

et alors on peut les équations canonique de Hamilton de façon compacte :

$$\dot{\vec{x}} = \underline{\underline{J}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} H \quad (375)$$

Ou $\underline{\underline{J}}$ est la matrice $6N \times 6N$. (et $\underline{\underline{I}}_{3N}$ est la matrice identité de rang 3)

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \vdots & \underline{\underline{I}}_{3N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \underline{\underline{0}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} 3N \\ \\ 3N \\ 3N \\ 3N \\ 3N \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \end{pmatrix}} \right\} 6N$$

propriétés de $\underline{\underline{J}}$:

$$1. \underline{\underline{J}}^\top = -\underline{\underline{J}} \quad 2. \underline{\underline{J}}^2 = -\underline{\underline{I}}_{6N} \quad 3. \underline{\underline{J}}^\top = -\underline{\underline{J}}^{-1} \quad (376)$$

3.4 Crochets de poissons

Soit donnée une quantité $f(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$.

La dérivée temporelle de f est

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (377)$$

D'ailleurs on sait que

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (378)$$

Si on les substituent dans $\dot{f}$ on a

$$\dot{f} = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (379)$$

$$= \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (380)$$

Où on définit les crochets de Poissons :

$$\{f, g\} = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right] \quad (381)$$

Ou avec une notation plus compacte

$$\{f, g\} = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \right)^\top}_{\vec{\nabla}_x f} \underbrace{J \left(\frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \right)}_{\vec{\nabla}_x g} \quad (382)$$

Propriétés des crochets de Poisson

1. $\{f, g\} = -\{g, f\}$ donc $\{f, f\} = 0$
2. $\{f, c\} = 0$ si c est constante (car $\frac{\partial c}{\partial q_i} = \frac{\partial c}{\partial p_i} = 0$)
3. $\{f, q_k\} = -\frac{\partial f}{\partial p_k}$ and $\{f, p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}$ évident par substitution car $\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0, \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij}$
4. $\{q_i, q_j\} = 0 \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ à nouveau, il suffit de faire la substitution
5. $\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$ cela suit des propriétés de la dérivée
6. $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$ trivial avec la linéarité de la dérivée
7. $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$ des propriétés de la dérivée.

Mettre g et f à droite ou à gauche n'a pas d'importance en mécanique classique, mais il le sera en mécanique quantique.

8. Identité de Jacobi $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$

Démo: avec la notation compacte

$$\{f, \{g, h\}\} = \vec{\nabla} f \cdot \underline{J} \cdot \vec{\nabla} \{g, h\} = \vec{\nabla} f \cdot \underline{J} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} g^\top \cdot \underline{J} \cdot \vec{\nabla} h) \quad (383)$$

$$= \sum_{ijkl} f'_l J_{lk} (g''_{ik} J_{ij} h'_j + g'_i J_{ij} h''_{jk}) \quad (384)$$

f'_i est la dérivée de f par rapport à x_i ($i = 1, \dots, 6N$) et de façon similaire pour g'_i, h'_i
 $g''_{ij}, f''_{ik}, h''_{jk}$

$$\{h, \{f, g\}\} = \sum_{ijkl} h'_l J_{ek} (f''_{ik} J_{ij} g'_j + f'_i J_{ij} g''_{jk}) \quad (385)$$

$$\{g, \{h, f\}\} = \sum_{ijkl} g'_l J_{lk} (h''_{ik} J_{ij} f'_j + h'_i J_{ij} f''_{jk}) \quad (386)$$

Lorsqu'on les additionne, on a l'impression de se perdre dans un déluge d'indices. On y va par "hiérarchies". Les dérivées secondes d'une fonction doivent aller ensemble. On commence par g'' , qui apparaît 2 fois:

$$\sum_{ijkl} [f'_l J_{lk} g''_{ik} J_{ij} h'_j + h'_l J_{lk} f'_i J_{ij} g''_{jk}] = \sum_{ijkl} \left[\underbrace{f'_j J_{jk} g''_{ik} J_{il} h'_l}_{\text{échange de } j \text{ et } l} + h'_l J_{lk} f'_i J_{ij} g''_{jk} \right] \quad (387)$$

On réécrit

$$\sum_{ijkl} h'_l [f'_j g''_{ik} J_{jk} J_{il} + f'_i g''_{jk} J_{lk} J_{ij}] = \sum_{ijkl} h'_l [\underbrace{f'_i g''_{jk} J_{ik} J_{jl} + f'_i g''_{jk} J_{lk} J_{ij}}_{\text{échange } i \text{ et } j}] \quad (388)$$

$$= \sum_{ijkl} h'_l f'_i [g''_{jk} J_{ik} J_{jl} + g''_{jk} J_{lk} J_{ij}] \quad (389)$$

$$= \sum_{ijkl} h'_l f'_i [\underbrace{g''_{kj} J_{ij} J_{kl}}_{\text{échange } k \text{ et } j} + g''_{jk} J_{lk} J_{ij}] \quad (390)$$

$$= \sum_{ijkl} h'_l f'_i [\underbrace{g''_{kj}}_{g''_{kj}=g''_{jk}} J_{ij} J_{kl} + g''_{jk} J_{lk} J_{ij}] \quad (391)$$

car l'ordre de dérivation n'importe pas

$$(392)$$

$$= \sum_{ijkl} h'_l f'_i g''_{jk} J_{ij} [J_{kl} + J_{lk}] \quad (393)$$

$$\underbrace{\sum_{ijkl}}_{\underline{J} \text{ antisym}} h'_l f'_i g''_{jk} J_{ij} [J_{kl} - J_{lk}] = 0 \quad (394)$$

Puisque on peut répéter pour chaque dérivée seconde, on montre que l'identité de Jacobi est vérifiée

On revient maintenant à

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (395)$$

D'abord il est évident que si le système est isolé (c'est à dire : L ne dépend pas explicitement du temps, et donc H non plus) alors H est conservée

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\{H, H\}}_{=0 \text{ antisym}} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}_{=0 \text{ isolé}} = 0 \quad (396)$$

En suite on peut énoncer le théorème de poisson

3.5 Théorème de Poisson

Soient f et g deux quantités conservées

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (397)$$

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \quad (398)$$

Alors leur crochets de Poisson est aussi conservé

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = 0 \quad (399)$$

Démo :

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \quad (400)$$

$$= -\{H, \{f, g\}\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \quad (401)$$

$$= \underbrace{\{g, \{H, f\}\} + \{f, \{g, H\}\}}_{\text{Jacobi}} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \quad (402)$$

$$= -\{g, \{f, H\}\} + \{f, \{g, H\}\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \quad (403)$$

$$= -\left\{g, -\frac{\partial f}{\partial t}\right\} + \left\{f, -\frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \quad (404)$$

$$= \left\{g, \frac{\partial f}{\partial t}\right\} - \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \quad (405)$$

$$= -\left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} - \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = -\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = 0 \quad (406)$$

Ce résultat est très important : Il nous dit qu'on peut "générer" des constantes du mouvements à partir d'autres constantes. Les nouvelles quantités conservées peuvent être triviales ou intéressantes.

Exemples de quantités conservée non triviales obtenues à partir du théorème de Poisson

1. Particule libre en 2d : $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{\vec{p}_x^2 + \vec{p}_y^2}{2m}$

Par Noether, on sait que p_x et p_y sont conservées ($\rightarrow$ invariance par translation).

Par Noether on sait que $l_z = xp_y - yp_x$ est conservée ($\rightarrow$ invariance par rotation).

On prend

$$\{l_z, p_x\} = \{xp_y - yp_x, p_x\} = \{xp_y, p_x\} - \{yp_x, p_x\} = \quad (407)$$

$$= x \underbrace{\{p_y, p_x\}}_{=0} + \underbrace{\{x, p_x\}}_{=1} p_y - y \underbrace{\{p_x, p_x\}}_{=0} - \underbrace{\{y, xp_x\}}_{=0} p_x = p_y \quad (408)$$

C'est un résultat intéressant, car il nous dit que si p_x est conservée (invariance par translations selon x) et si l_z est conservée (invariance par rotations dans le plan xy), alors p_y est conservée (invariance par translations selon y).

Cela est géométriquement intuitif : si il y a invariance par rotation, on peut tourner le système de 90, rien ne change, et donc l'invariance par translation selon x devient celle selon y, sans que rien ait changé

2. Invariance par rotations dans les plans xz (l_y conservée) et yz (l_x conservée).

Alors on a

$$\{l_x, l_y\} = \underbrace{\{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\}}_{l_x} = \quad (409)$$

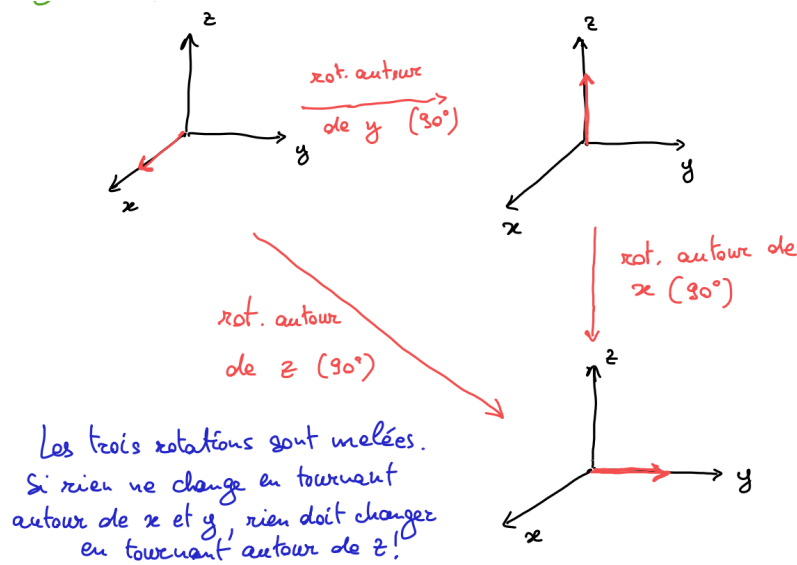
$$= \{yp_z, zp_x\} - \underbrace{\{yp_z, xp_z\}}_{=0} - \underbrace{\{zp_y, zp_x\}}_{=0} + \{zp_y, xp_z\} = \quad (410)$$

$$= \{yp_z, zp_x\} + \{zp_y, xp_z\} = y \underbrace{\{p_z, z\}}_{=1} p_x + x \underbrace{\{z, p_z\}}_{=1} p_y = \quad (411)$$

$$= xp_y - yp_x = l_z \quad (412)$$

Donc, la conservation de l_x et l_y implique la conservation de l_z et donc la symétrie par rotations autour de l'axe z. Cela veut dire que l'on ne peut pas avoir la symétrie par rotations seulement autour de deux axes, mais la troisième est mathématiquement nécessaire !

Géométriquement on peut le voir comme cela :



3.6 Génération de nouvelles quantités conservées pour l'oscillateur harmonique

Le Lagrangien de l'oscillateur harmonique (en 1D) est

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \quad (413)$$

On passe au formalisme Hamiltonien

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m} \quad (414)$$

and

$$H(q, p) = p \underbrace{\left(\frac{p}{m}\right)}_{\dot{q}} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (415)$$

Le système est isolé (L ne dépend pas de t), donc H est conservé :

$$\dot{H} = \underbrace{\{H, H\}}_{\text{antisym}} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}_{=0} = 0 \quad (416)$$

Est-ce qu'il y a des autres quantités conservées ?

On peut les chercher à l'aide de l'équation

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (417)$$

On impose = 0 car on cherche une quantité conservée.

On calcule $\{f, H\}$:

$$\{f, H\} = \left\{f, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right\} = \frac{1}{2m} \{f, p^2\} + \frac{1}{2}m\omega^2 \{f, q^2\} \quad (418)$$

$$= \frac{1}{2m} [p\{f, p\} + \{f, p\}p] + \frac{1}{2}m\omega^2 [q\{f, q\} + \{f, q\}q] \quad (419)$$

$$= \frac{1}{2m} \left[p \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial q} p \right] + \frac{1}{2}m\omega^2 \left[q \left(-\frac{\partial f}{\partial p} \right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial p} \right) q \right] = \quad (420)$$

$$= \frac{1}{m} p \frac{\partial f}{\partial q} - m\omega^2 q \frac{\partial f}{\partial p} \quad (421)$$

On peut donc écrire l'équation à résoudre :

$$\frac{1}{m}p \frac{\partial f}{\partial q} - m\omega^2 q \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (422)$$

Il s'agit d'une équation différentielle aux dérivées partielles. On commence à la résoudre par séparation de variables : on cherche une solution de la forme

$$f(q, p, t) = g(q, p) \cdot h(t) \quad (423)$$

Après substitution on a

$$\frac{1}{m}p \frac{\partial g}{\partial q} \cdot h - m\omega^2 q \frac{\partial g}{\partial p} h + g \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (424)$$

Ici on pourrait même écrire $\frac{dh}{dt}$ car h ne dépend que de t .

On manipule l'équation en menant la partie avec $\frac{dh}{dt}$ à droite, et on divise par h ($h \neq 0$, car sinon f serait trivial).

On obtient :

$$\frac{1}{g} \left[\frac{1}{m}p \frac{\partial g}{\partial q} - m\omega^2 q \frac{\partial g}{\partial p} \right] = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \quad (425)$$

Le terme de gauche ne dépend seulement de " p " et " q " et le terme de droite ne dépend que de " t ".

Deux fonctions de variables différentes (p et q à gauche, t à droite) peuvent être égales seulement si elles sont constantes (c'est à dire, si en effet elles ne dépendent pas des variables).

Donc

$$\begin{cases} -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = c \\ \frac{1}{g} \left[\frac{1}{m}p \frac{\partial g}{\partial q} - m\omega^2 q \frac{\partial g}{\partial p} \right] = c \end{cases} \quad (426)$$

(On commence par $c \neq 0$ et on verra plus loin que $c = 0$)

La solution de la première équation est simple :

$$-\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = c \Rightarrow \frac{d}{dt} \ln h = -c \Rightarrow h(t) = h(0)e^{-ct} \quad (427)$$

La deuxième équation est plus compliquée

$$\frac{1}{m}p \frac{\partial g}{\partial q} - m\omega^2 q \frac{\partial g}{\partial p} = cg \quad (428)$$

On cherche une solution de la forme (sorte de développement limité):

$$g(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{nl} q^n p^l \quad (429)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial q} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} n a_{nl} q^{n-1} p^l \Rightarrow p \frac{\partial g}{\partial q} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} n a_{nl} q^{n-1} p^{l+1} \\ \frac{\partial g}{\partial p} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} l a_{nl} q^n p^{l-1} \Rightarrow q \frac{\partial g}{\partial p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} l a_{nl} q^{n+1} p^{l-1} \end{aligned} \quad (430)$$

Donc si l'on remet tout ensemble, l'équation devient

$$\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} n a_{nl} q^{n-1} p^{l+1} - m\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} l a_{nl} q^{n+1} p^{l-1} = c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{nl} q^n p^l \quad (431)$$

et on trouve la solution par identification des termes de mêmes puissances.

- Le terme constant ($q^0 p^0$) est présent seulement à droite ($n = l = 0$ et donc $a_{00} = 0$)
- Le terme q ($q^1 p^0$) vient seulement du deuxième terme à gauche ($n = 0, l = 1$) mais pas du premier, et du terme de droite ($n = 1, l = 0$)

$$-m\omega^2 a_{01} q = c a_{10} q \quad a_{01} = -\frac{c}{m\omega^2} a_{10} \quad (432)$$

- Le terme $p (q^0, p^1)$ vient seulement du premier terme à gauche ($n = 1, l = 0$) mais pas du deuxième, et du terme de droite ($n = 0, l = 1$)

$$\frac{1}{m}a_{10}p = ca_{01}p \Rightarrow a_{10} = mca_{01} \quad (433)$$

Donc on a

$$\begin{cases} a_{01} = -\frac{c}{m\omega^2}a_{10} \\ a_{10} = mca_{01} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{soit } -\frac{c^2}{\omega^2} = 1 \\ \text{soit } a_{10} = a_{01} = 0 \end{cases} \quad (434)$$

La première implique $c = \pm i\omega$ $\Rightarrow$ on l'appelle c_1 -

On continue avec les termes d'ordre supérieure :

- $q^2 (q^2 p^0)$:

Première terme à gauche : pas de contribution

Deuxième terme à gauche : $n = 1, l = 1$

Terme à droite : $n = 2, l = 0$

et donc on a

$$-m\omega^2 a_{11}q^2 = ca_{20}q^2 \Rightarrow a_{20} = -\frac{m\omega^2}{c}a_{11} \quad (435)$$

- Le terme $p^2 (q^0 p^2)$

Première terme à gauche : $n = 1, l = 1$

Deuxième terme à gauche : pas de contribution

Terme à droite : $n = 0, l = 2$

et donc on a

$$\frac{1}{m}a_{11}p^2 = ca_{02}p^2 \Rightarrow a_{02} = \frac{1}{mc}a_{11} \quad (436)$$

Si on met les résultats ensemble, on aura

$$\frac{a_{20}}{a_{02}} = -m^2\omega^2 \quad (437)$$

- Le terme $qp (q^1 p^1)$

Première terme à gauche : $n = 2, l = 0$

Deuxième terme à gauche : $n = 0, l = 2$

Terme à droite : $n = 1, l = 1$

$$\frac{2}{m}a_{20} - 2m\omega^2 a_{02} = ca_{11} \quad (438)$$

Mais on sait que $a_{20} = -\frac{m\omega^2}{c}a_{11}$ et $a_{02} = \frac{1}{mc}a_{11}$

$$\left[\frac{2}{m} \left(-\frac{m\omega^2}{c} \right) - 2m\omega^2 \left(\frac{1}{mc} \right) \right] a_{11} = ca_{11} \quad (439)$$

$$\left(-2\frac{\omega^2}{c} - 2\frac{\omega^2}{c} \right) a_{11} = ca_{11} \Rightarrow -4\omega^2 = c^2 \Rightarrow c = \pm 2i\omega \quad \text{On l'appelle } c_2 \quad (440)$$

A remarquer: exactement comme pour le terme linéaire, aussi $a_{20} = a_{02} = a_{11} = 0$ est solution.

Ce résultat est très intéressant, car le "c" qui sert pour les termes quadratiques est différent du "c" qui sert aux termes linéaires : $c_1 \neq c_2$. Mais bien évidemment on peut satisfaire les relations entre les coefficients quadratiques (a_{20}, a_{02} et a_{11}) si les trois sont nuls. Dans ce cas ils n'influencent pas la valeur de c.

Si on choisit $a_{20} = a_{02} = a_{11} = 0$, alors

$$g(q, p) = \underbrace{a_\infty}_0 + a_{01}[p \pm im\omega q] + \underbrace{0}_{2^{ième} ordre} + \dots \quad (441)$$

De manière similaire, on pourrait montrer que chaque ordre supérieur va donner une autre valeur de c donc on les met à 0

Pour distinguer les deux signes on dit

$$g_\pm(q, p) = a[p \pm im\omega q] \quad (442)$$

et finalement

$$f_\pm(q, p, t) = ah(0)(p \pm im\omega q)e^{\mp i\omega t} = A_\pm(p \pm im\omega q)e^{\mp i\omega t} \quad (443)$$

Par construction, $f_\pm$ sont conservées : $\begin{cases} \dot{f}_+ = 0 \\ \dot{f}_- = 0 \end{cases}$

On prend les crochets de Poisson entre f_+ et f_- :

$$\begin{aligned} \{f_+, f_-\} &= \{A_+(p + im\omega q)e^{-i\omega t}, A_-(p - im\omega q)e^{i\omega t}\} = \\ &= A_+A_- \{p + im\omega q, p - im\omega q\} = A_+A_- [-im\omega \underbrace{\{p, q\}}_{-1} + im\omega \underbrace{\{q, p\}}_1] = \\ &= 2iA_+A_-m\omega \end{aligned} \quad (444)$$

On avait la liberté de choisir A_+ et A_- comme on veut, et donc on les choisit tels que

$$2iA_+A_-m\omega = 1 \quad \Rightarrow \quad A_+A_- = \frac{1}{2m\omega i} \quad (445)$$

$$\Rightarrow \quad A_+ = \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} = A_- \quad (446)$$

On trouve alors que

$$\{f_+, f_-\} = 1 \quad \Leftarrow \text{rappel : } \{q, p\} = 1 \quad (447)$$

Ce qu'on a fait et de combiner q et p de façon à trouver deux nouvelles variables dynamiques telles que leurs équation soient simples :

$$\begin{cases} \dot{f}_+ = 0 \\ \dot{f}_- = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{matrix} \text{ce sont les équations les plus simples} \\ \text{possibles.} \end{matrix} \quad (448)$$

et f_+ et f_- jouent les rôles d'une coordonnée et d'une impulsion !

D'abord, comment on les résout ?

1.

$$\begin{cases} f_+(t) = f_+(0) = A_+(p(0) + im\omega q(0)) \\ f_-(t) = f_-(0) = A_-(p(0) - im\omega q(0)) \end{cases} \quad \begin{matrix} p(0) \text{ et } q(0) \text{ doivent être connus} \\ \text{, sinon le problème est mal défini} \end{matrix} \quad (449)$$

2.

$$\begin{cases} \overbrace{A_+[p(t) + im\omega q(t)]e^{-i\omega t}}^{f_+(t)} = A_+[p(0) + im\omega q(0)] \\ \underbrace{A_-[p(t) - im\omega q(t)]e^{+i\omega t}}_{f_-(t)} = A_-[p(0) - im\omega q(0)] \end{cases} \quad (450)$$

3.

$$\begin{cases} p(t) + im\omega q(t) = [p(0) + im\omega q(0)]e^{+i\omega t} \\ p(t) - im\omega q(t) = [p(0) - im\omega q(0)]e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (451)$$

La solution de ce système donne $q(t)$ et $p(t)$

Vu que f_+ correspond aux coordonnées généralisées et f_- aux impulsion généralisée conjuguée
Alors

$$\begin{cases} \dot{f}_+ = 0 \\ \dot{f}_- = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{sont des eqs. canoniques} \\ \text{de Hamilton} \end{matrix} \quad \begin{cases} \dot{f}_+ = \frac{\partial K}{\partial f_-} = 0 \\ \dot{f}_- = -\frac{\partial K}{\partial f_+} = 0 \end{cases} \quad (452)$$

Avec Hamiltonien $K = \text{const}$ (ne dépend ni de f_+ ni de f_-)

Il s'agit des équations les plus simples possibles ! L'hamiltonien H peut s'écrire à l'aide de f_+ et f_- :

$$H = i\omega f_+ f_- \quad (453)$$

Si on avait regardé les termes du deuxième ordre ?

D'abord, il faut mettre à zéro les coefficients des termes d'ordre 1 (car ils nécessitent de c_1 qui est différent de c_2) et, par analogie, il faudra mettre à zéro tous les termes d'ordre supérieure à 2 (ils nécessitent de c_k , $k \leq 3$).

Pour rappel :

$$c_2 = \pm 2i\omega \quad \text{et} \quad a_{20}q^2 + a_{02}p^2 + a_{11}qp \quad (454)$$

avec

$$\frac{a_{20}}{a_{02}} = -m^2\omega^2 \quad \text{et} \quad a_{11} = mc_2 a_{02} = \pm 2i\omega m a_{02} \quad (455)$$

Donc

$$a_{20}q^2 + a_{02}p^2 + a_{11}qp = a_{02} [-m^2\omega^2 q^2 + p^2 \pm 2i\omega m qp] = a_{02} [p \pm i m \omega q]^2 \quad (456)$$

Finalement on a deux quantités conservées de deuxième ordre

$$\begin{cases} f_+^{(2)} = A_+^{(2)} (p + i m \omega q)^2 e^{-2i\omega t} \\ f_-^{(2)} = A_-^{(2)} (p - i m \omega q)^2 e^{+2i\omega t} \end{cases} \quad (457)$$

On voit tout-de-suite que, à une constante multiplicative prêt, elles sont

$$\begin{cases} f_+^{(2)} f_+^2 \\ f_-^{(2)} \propto f_-^2 \end{cases} \quad (458)$$

Il nous reste le cas $c = 0$

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad h(t) = \text{constante} \quad (459)$$

$$\frac{1}{g} \left[\frac{1}{m} p \frac{\partial g}{\partial q} - m\omega^2 q \frac{\partial g}{\partial p} \right] = 0 \quad (460)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} p \frac{\partial g}{\partial q} - m\omega^2 q \frac{\partial g}{\partial p} = 0 \quad (461)$$

On applique à nouveau la séparation des variables

$$g(q, p) = g_q(q) g_p(p) \quad (462)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} p g_p \frac{\partial g_q}{\partial q} - m\omega^2 q g_q \frac{\partial g_p}{\partial p} = 0 \quad (463)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{q} \frac{1}{g_q} \frac{\partial g_q}{\partial q}}_{\text{seulement } q} = \underbrace{m^2 \omega^2 \frac{1}{p} \frac{1}{g_p} \frac{\partial g_p}{\partial p}}_{\text{seulement } p} \quad (464)$$

Donc les deux cotés doivent être égales à une même constante :

$$\begin{cases} \frac{1}{q} \frac{1}{g_q} \frac{\partial g_q}{\partial q} = b \\ m^2 \omega^2 \frac{1}{p} \frac{1}{g_p} \frac{\partial g_p}{\partial p} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{g_q} \frac{\partial g_q}{\partial q} = b \cdot q \\ \frac{1}{g_p} \frac{\partial g_p}{\partial p} = b \cdot p \frac{1}{m^2 \omega^2} \end{cases} \quad (465)$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{d}{dq} \ln g_q = bq \\ \frac{d}{dp} \ln g_p = bp \frac{1}{m^2 \omega^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_q(q) = A_q e^{1/2 bq^2} \\ g_p(p) = A_p e^{\frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 \omega^2}} \end{cases} \quad (466)$$

Et enfin :

$$f(q, p, t) = \underbrace{h(t)}_{\text{const}} \underbrace{g_q(q)}_{A_q e^{1/2 bq^2}} \underbrace{g_p(p)}_{A_p e^{\frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 \omega^2}}} = \text{const} \cdot e^{\frac{b}{m\omega^2} \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \right]} \quad (467)$$

$H !!$

Donc, le cas $c = 0$ produit comme quantité conservé l'Hamiltonien.

Devoirs à la maison

1. trouver $A_{\pm}^{(2)}$ tels que $\{f_+^{(2)}, f_-^{(2)}\} = H$
2. Si on partait de l'équation

$$\{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (468)$$

et on représente f comme

$$f(q, p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{a_{nl}(t)}_{\text{dép. de } t} q^n p^l \quad (469)$$

3. Dans le cas $c = 0$ (qui amène à H comme quantité conservée,) essayer la forme

$$f(q, p, t) = h(t) [g_q(q) + g_p(p)] \quad (470)$$

Quelle est la relation avec $h(t)g_q(q)g_p(p)$?

3.7 Transformation canonique 1

La transformation entre (q, p) et (f_+, f_-) qu'on a trouvé pour l'oscillateur harmonique est telle que

$$\begin{cases} \{q, p\} = 1 \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \{f_+, f_-\} = 1 \\ \dot{f}_+ = \frac{\partial K}{\partial f_-} = 0 \\ \dot{f}_- = -\frac{\partial K}{\partial f_+} = 0 \\ K = \text{const.} \end{cases} \quad (471)$$

La structure canonique est préservée. On l'appelle **Transformation canonique**.

Plus généralement, on cherche les règles pour faire une transformation du type

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \\ P_i = P_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \end{cases} \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases} \quad \forall i \quad (472)$$

On va demander que les équations qu'on trouve soient simple plus tard.

Pour le faire on passe par le principe de moindre action et on profite de l'invariance de jauge.
Pour rappel, l'action est

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) dt \quad (473)$$

On procède par étapes (attention : passages symboliques !)

- 1.

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i \dot{q}_i - L \\ \Rightarrow L &= \sum_i p_i \dot{q}_i - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \end{aligned} \quad (474)$$

- 2.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \right] dt \quad (475)$$

avec $\{q_i(t_1)\}, \{q_i(t_2)\}, \{p_i(t_1)\}, \{p_i(t_2)\}$ connus.

On montre ici que, formulée de cette façon, l'action mène aux équations canoniques de Hamilton :

$$\frac{\delta S}{\delta p_l(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \underbrace{\frac{\delta p_i}{\delta p_l}}_{\delta_{il} \delta(t-t')} \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_l} \delta(t-t') \right] dt' \quad (476)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t') \left[\dot{q}_l - \frac{\partial H}{\partial p_l} \right] dt' = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}} \quad (477)$$

$$\frac{\delta S}{\delta q_l(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \frac{\delta \dot{q}_i}{\delta q_l} - \frac{\partial H}{\partial q_l} \delta(t-t') \right] dt' \quad (478)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \underbrace{\frac{d}{dt} (\delta_{il} \delta(t-t'))}_{\text{par partie}} - \frac{\partial H}{\partial q_l} \delta(t-t') \right] dt' = \quad (479)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[- \sum_i \frac{dp_i}{dt} \delta_{il} \delta(t-t') - \frac{\partial H}{\partial q_l} \delta(t-t') \right] dt' = \quad (480)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t') \left[-\dot{p}_l - \frac{\partial H}{\partial q_l} \right] dt' = 0 \quad (481)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{p}_l = - \frac{\partial H}{\partial q_l}} \quad (482)$$

Donc l'idée est que $\{p_l\}$ et $\{q_l\}$ sont les deux variables à "changer" pour chercher le minimum de S .

3. On veut faire le changement de variables $(\{q_i\}, \{p_i\})$ vers $(\{Q_i\}, \{P_i\})$ sans changer la physique (car bien évidemment le système reste le même).

Donc

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) + \underbrace{\frac{d}{dt} F(\{Q_i\}, \{P_i\}, \{q_i\}, \{p_i\}, t)}_{\text{pas de } \{\dot{q}_i\}, \{\dot{Q}_i\}, \dots} \quad (483)$$

Où la première partie est la structure nécessaire pour avoir $\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases}$

$\frac{d}{dt} F$ est la dérivée totale compatible avec l'invariance de jauge.

Mais

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (484)$$

Donc, en remettant tout ensemble :

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (485)$$

et il faut identifier les différents termes : on a typiquement 4 choix (par tradition)

$$\begin{aligned} F(\{q_i\}, \{p_i\}, \{Q_i\}, \{P_i\}, t) &= F_1(\{q_i\}, \{Q_i\}, t) \\ \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial p_i} &= 0 \quad \frac{\partial F_1}{\partial P_i} = 0 \end{aligned} \quad (486)$$

On reste avec

$$\sum_i \underbrace{p_i \dot{q}_i}_1 - \underbrace{H}_2 = \sum_i \underbrace{P_i \dot{Q}_i}_3 - \underbrace{K}_2 + \sum_i \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i}_1 + \sum_i \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i}_3 + \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial t}}_2 \quad (487)$$

Alors en identifiant les termes 1 ensemble, 2 ensemble et 3 ensemble on a :

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad \sum_i P_i \dot{Q}_i + \sum \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ Q_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{cases} \quad \forall i \quad (488)$$

et enfin

$$-H = -K + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (489)$$

Pour résumer on trouve qu'il y a une transformation canonique (elle l'est par construction car il vient de la forme du Lagrangien, $\sum_i p_i \dot{q}_i - H$) si, donnée une fonction $F_1(\{q_i\}, \{Q_i\}, t)$ on pose

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ Q_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{cases} \quad \text{voulant dire} \quad \begin{cases} p_i = p_i(\{q_i\}, \{Q_i\}, t) \\ P_i = P_i(\{q_i\}, \{Q_i\}, t) \end{cases} \quad (490)$$

on inverse ces relations pour avoir explicitement $\{Q_i\}, \{P_i\}$

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \\ P_i = P_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \end{cases} \quad \text{et si nécessaire, l'inverse} \quad \begin{cases} q_i = q_i(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) \\ p_i = p_i(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) \end{cases} \quad (491)$$

et

$$K = H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) + \frac{\partial F_1(\{q_i\}, \{Q_i\}, t)}{\partial t} = K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) \quad (492)$$

Exemple :

$$\begin{cases} f_+ = Q = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_i}}(p + im\omega q)e^{-i\omega t} \\ f_- = P = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_i}}(p - im\omega q)e^{+i\omega t} \end{cases} \quad \text{déjà rencontré} \quad (493)$$

$$\Rightarrow \quad p = \sqrt{2m\omega_i} e^{i\omega t} Q - im\omega q \quad (494)$$

$$P = \underbrace{e^{2i\omega t} Q - \sqrt{\frac{im\omega}{2}} e^{+i\omega t} q}_{\frac{1}{\sqrt{2m\omega_i}} p(Q, q, t)} - \sqrt{\frac{im\omega}{2}} e^{+i\omega t} q \quad (495)$$

$$= e^{2i\omega t} Q - \sqrt{2m\omega_i} e^{i\omega t} q \quad (496)$$

Mais

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p = \sqrt{2m\omega_i} e^{i\omega t} Q - im\omega q \quad (497)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{intégration}} \quad F_1(q, Q, t) = \sqrt{2m\omega_i} e^{i\omega t} qQ - \frac{1}{2} im\omega q^2 + g(Q, t) \quad (498)$$

aussi

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P = -e^{2i\omega t} Q + \sqrt{2m\omega_i} e^{i\omega t} q \quad (499)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{intégration}} \quad F_2(q, Q, t) = -\frac{1}{2} e^{2i\omega t} Q^2 + \sqrt{2m\omega_i} e^{i\omega t} qQ + h(q, t) \quad (500)$$

et par comparaison

$$F_1(q, Q, t) = \sqrt{2m\omega_i} e^{i\omega t} qQ - \underbrace{\frac{1}{2} im\omega q^2}_{1)} + \underbrace{g(Q, t)}_{2)} \quad (501)$$

$$F_2(q, Q, t) = \sqrt{2m\omega_i} e^{i\omega t} qQ - \underbrace{\frac{1}{2} e^{2i\omega t} Q^2}_{2)} + \underbrace{h(q, t)}_{1)} \quad (502)$$

et finalement

$$F_1(q, Q, t) = \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} qQ - \frac{1}{2}i m \omega q^2 - \frac{1}{2}e^{2i\omega t} Q^2 \quad (503)$$

Donc on a

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (504)$$

Il nous faut encore $q = q(Q, P, t)$. On rappelle que

$$P = e^{2i\omega t} Q - \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} q \quad (505)$$

d'où on a

$$q = \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} e^{+i\omega t} Q - \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} e^{-i\omega t} p = \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} [e^{i\omega t} Q - e^{-i\omega t} P] \quad (506)$$

Aussi, il nous faut $p = p(Q, P, t)$. On sait que $p = \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} Q - im\omega q$ qui devient

$$p = \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} Q - \sqrt{\frac{i m \omega}{2}} e^{i\omega t} Q + \sqrt{\frac{i m \omega}{2}} e^{-i\omega t} P \quad (507)$$

$$= \sqrt{\frac{i \omega m}{2}} [e^{i\omega t} Q + e^{-i\omega t} P] \quad (508)$$

Donc l'Hamiltonien est :

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (509)$$

qui devient

$$H = \frac{1}{2m} \left\{ \frac{i\omega m}{2} (e^{2i\omega t} Q^2 + e^{-2i\omega t} P^2 + 2PQ) \right\} + \frac{1}{2} m \omega^2 \left\{ \frac{1}{2m\omega i} (e^{2i\omega t} Q^2 + e^{-2i\omega t} P^2 - 2PQ) \right\} \quad (510)$$

$$= \frac{\omega}{4} [i (e^{2i\omega t} Q^2 + e^{-2i\omega t} P^2 + 2PQ) - i (e^{2i\omega t} Q^2 + e^{-2i\omega t} P^2 - 2PQ)] = i\omega PQ \quad (511)$$

D'ailleurs

$$F_1(q, Q, t) = \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} qQ - \frac{1}{2} m \omega i q^2 - \frac{1}{2} e^{2i\omega t} Q^2 \quad (512)$$

et

$$(513)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = i\omega \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} qQ - i\omega e^{2i\omega t} Q^2 \quad (514)$$

et en y substituant $q = \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} [e^{i\omega t} Q - e^{-i\omega t} P]$ on a

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = i\omega \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} [e^{i\omega t} Q - e^{-i\omega t} P] Q - i\omega e^{2i\omega t} Q^2 = \quad (515)$$

$$= i\omega e^{2i\omega t} Q^2 - i\omega QP - i\omega e^{2i\omega t} Q^2 = -i\omega QP \quad (516)$$

et finalement

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = i\omega PQ - i\omega QP = 0 \quad (517)$$

donc K = constante et, comme prévu :

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0 \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \end{cases} \quad (518)$$

donc Q et P sont des quantités conservées

3.8 Transformation canonique 2

Pour rappel,

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \underbrace{\sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}}_{\frac{dF}{dt}} \quad (519)$$

On cherche F de la forme $F(\{q_i\}, \{P_i\}, t)$ (avec une nouvelle impulsion)

Donc $\frac{\partial F}{\partial Q_i} = 0$ $\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \quad \forall i$ et

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (520)$$

En regardant les différents termes, on voit qu'on ne peut pas satisfaire l'égalité. Donc il faut modifier la fonction F comme suit :

$$F = - \sum_i P_i Q_i + F_2(\{q_i\}, \{P_i\}, t) \quad (521)$$

Alors on a

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \underbrace{\left\{ - \sum_i \dot{P}_i Q_i - \sum_i P_i \dot{Q}_i + \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\}}_{\frac{dF}{dt}} \quad (522)$$

Et on peut satisfaire l'égalité avec

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \end{cases} \quad \text{et} \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (523)$$

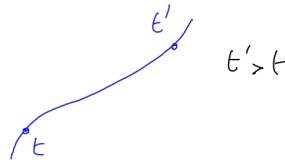
De manière similaire on peut chercher des F qui dépendent uniquement de $(\{p_i\}, \{Q_i\})$ ou de $(\{p_i\}, \{P_i\})$ (regarder le polycopié). On remarque que l'on avait $P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$ et $Q_i = -\frac{\partial F_1}{\partial P_i}$ qui est exactement la relation qui découle des transformations de Legendre.

En effet les différentes façon d'engendrer les transformations sont liées par des transformations de Legendre.

Pourquoi insiste-t-on sur les transformations canoniques ?

On écrit les équations canoniques de Hamilton au temps t :

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (524)$$



En connaissant $q_i(t)$ et $p_i(t)$, on va calculer $q_i(t')$ et $p_i(t')$:

$$\begin{cases} q_i(\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}, t - t') \\ p_i(\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}, t - t') \end{cases} \quad (525)$$

Donc à partir de $q_i(t)$, $p_i(t)$ on trouve $q_i(t')$, $p_i(t')$ et puisque l'on peut inverser le temps, on a la relation inverse. Mais le système obéit les équations canoniques de Hamilton aussi au temps t' , donc :

L'évolution du système transforme les variables au temps t (qui obéissent les équations canoniques de Hamilton) dans les variables au temps t' (qui obéissent les équations canoniques de Hamilton)

L'évolution du système **est une transformation canoniques !!!**

Intégration à la Verlet Si on veut intégrer numériquement les équations du mouvement, on doit discrétiser le temps (ici on le fait pour un seul degré de liberté, pour simplicité)

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta t \frac{\partial H(q,p)}{\partial p} \\ p(t + \Delta t) = p(t) - \Delta t \frac{\partial H(q,p)}{\partial q} \end{cases} \quad (526)$$

La question est : quels q et p on utilise dans H ? $q(t)$ et $p(t)$? $q(t + \Delta t)$ et $p(t + \Delta t)$? un mélange ?

Dans la limite (mathématique mais pas accessible à l'ordinateur), chaque choix donne le même résultat. Mais on sait que l'évolution du système est une transformation canonique. Donc un algorithme qui est une transformation canonique est plus appropriée (plus proche) à la vrai dynamique du système.

On doit le construire. D'abord on appelle :

$$\begin{cases} q(t + \Delta t) = Q \\ p(t + \Delta t) = P \end{cases} \quad \begin{cases} q = q(t) \\ p = p(t) \end{cases} \quad (527)$$

On ré-écrit d'abord : $Q = q + \Delta t \frac{\partial H}{\partial p}$ on fixe cette première égalité et on décide d'utiliser P dans H .

Donc on va chercher une fonction génératrice du type $F(p, Q, \Delta t)$. On reprend l'invariance de jauge

$$\underbrace{p\dot{q}}_{\text{pas compensé}} - H = P\dot{Q} - K + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial p}\dot{p}}_{\text{pas compensé}} + \frac{\partial F}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \quad (528)$$

il est évident qu'il faut ajouter un morceau

$$F(q, p, Q, P, \Delta t) = qp + F(p, Q, \Delta t) \quad (529)$$

$$\Rightarrow p\dot{q} - H = P\dot{Q} - K + qp + \dot{q}p + \frac{\partial F}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial F}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \quad (530)$$

$$q = -\frac{\partial F}{\partial p} \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} \quad (531)$$

On avait écrit $Q = q + \Delta t \frac{\partial H}{\partial p}$ qui devient $q = Q - \Delta t \frac{\partial H}{\partial p}$ et donc

$$F(p, Q) = -Qp + \Delta t H(p, Q) \quad (532)$$

qui engendre $P = p - \Delta t \frac{\partial H}{\partial Q}$, Donc dans H il faut utiliser $p(t)$ et $q(t + \Delta t) = Q$ qui est l'algorithme de Verlet !

Cas particulier de transformation canonique

$$\begin{aligned} F_1(\{q_i\}, \{Q_i\}) &= \sum_i q_i Q_i \\ \Rightarrow \begin{cases} p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i \\ P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i \end{cases} &\quad \text{donc} \quad \begin{cases} Q_i = p_i \\ P_i = -q_i \end{cases} \end{aligned} \quad (533)$$

Donc, a part un changement de signe, on peut aisément échanger coordonnés et impulsions. Leur rôle, mathématiquement est le même.

Propriétés des transformations canoniques

D'abord, on définit le Jacobien $\underline{\underline{M}}$ (est une matrice) d'une transformation canonique. Dans l'espace de phase (dim = $6N$) on définit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{3N} \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{3N} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 2cm\vec{x} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_{3N} \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{3N} \end{pmatrix} \quad (534)$$

Donc la transformation est

$$\vec{y}(\vec{x}) \quad \text{et} \quad M_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad (535)$$

La transformation inverse est

$$\vec{x}(\vec{y}) \quad \text{avec} \quad (\underline{\underline{M}}^{-1})_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \quad (536)$$

en effet $\vec{y}(\vec{x}) = \vec{y}(\vec{x}(\vec{y}))$ donc

$$\frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \sum_l \frac{\partial y_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} = \sum_l (\underline{\underline{M}})_{il} (\underline{\underline{M}}^{-1})_{lj} = \delta_{ij} \quad (\text{par déf de matrice inverse}) \quad (537)$$

Il est d'ailleurs bien évidemment que $\frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \delta_{ij}$

On peut construire une nouvelle propriété à partir de $\underline{\underline{M}}$:

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}}^T = \underline{\underline{J}} \quad \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}} \quad \underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}}^T = \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{J}} \quad \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}}^{-1} \quad (538)$$

Démo :

D'abord on rappelle que

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad (539)$$

et

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -\frac{\partial}{\partial Q_i} \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial Q_i} \quad (540)$$

$$\underline{\underline{M}}_{3N+i,j} = -(\underline{\underline{M}}^{-1})_{3N+i,j} \quad (541)$$

En utilisant les autres relations on peut trouver que chaque élément de $\underline{\underline{M}}$ est associé à un élément de $\underline{\underline{M}}^{-1}$
Pour exemple

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = -\frac{\partial}{\partial P_i} \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial P_i} \quad (542)$$

$$\underline{\underline{M}}_{i,j} = -(\underline{\underline{M}}^{-1})_{3N+i,3N+j} \quad (543)$$

si on écrit

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \vdots & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \vdots & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \quad \text{il y a quatre blocs chacun de } 3N \times 3N \quad (544)$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \vdots & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \vdots & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} \quad (545)$$

Les relations que l'on vient de trouver sont :

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \left(\frac{\partial p}{\partial P} \right)^\top \Rightarrow \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)^\top = \frac{\partial p}{\partial P} \quad (546)$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = -\left(\frac{\partial p}{\partial Q} \right)^\top \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)^\top = -\frac{\partial p}{\partial Q} \quad (547)$$

Mais

$$\underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \\ -\frac{\partial q}{\partial Q} & -\frac{\partial q}{\partial P} \end{pmatrix} \quad (548)$$

et

$$\underline{\underline{M}}^\top \underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^\top & \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^\top \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^\top & \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^\top & \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^\top \\ -\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^\top & \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^\top \end{pmatrix} \quad (549)$$

et similairement pour les autres.

Donc

$$\underline{\underline{M}}^\top \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}}^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{M}}^\top \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}} \quad (550)$$

et on peut aussi prouver que $\underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}}^\top = \underline{\underline{J}}$:

de $\underline{\underline{M}}^\top \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}}^{-1}$ on prend l'inverse : $\underline{\underline{J}} (\underline{\underline{M}}^\top)^{-1} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}}$ (on rappelle que $\underline{\underline{J}}^{-1} = -\underline{\underline{J}}$)

et après on multiplie à droite par $\underline{\underline{M}}^\top$:

$$\underline{\underline{J}} (\underline{\underline{M}}^\top)^{-1} \underline{\underline{M}}^\top = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}}^\top \Rightarrow \underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}}^\top = \underline{\underline{J}} \quad (551)$$

A partir de cette propriété on peut montrer que les crochets de Poisson sont préservés par les transformations canoniques:

$$\{f, g\}_{\vec{x}} = \vec{\nabla}_{\vec{x}} f^\top \underline{\underline{J}} \vec{\nabla}_{\vec{x}} g \quad (552)$$

Mais

$$f = f(\vec{y}) = f(\vec{y}(\vec{x})) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial Q_i} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}}_{(\underline{\underline{M}}^{-1})_{ij}} \quad (553)$$

Donc

$$\vec{\nabla}_{\vec{y}} f^\top = \vec{\nabla}_{\vec{x}} f^\top \underline{\underline{M}}^{-1} \quad (554)$$

et donc

$$\{f, g\}_{\vec{y}} = \vec{\nabla}_{\vec{y}} f^\top \underline{\underline{J}} \vec{\nabla}_{\vec{y}} g = \vec{\nabla}_{\vec{x}} f^\top \underbrace{\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{J}} (\underline{\underline{M}}^{-1})^\top}_{=(\underline{\underline{M}}^{-\top} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}})^{-1} = -\underline{\underline{J}}^{-1} = \underline{\underline{J}}} \vec{\nabla}_{\vec{x}} g \quad (555)$$

$$= \vec{\nabla}_{\vec{x}} f^\top \underline{\underline{J}} \vec{\nabla}_{\vec{x}} g = \{f, g\}_{\vec{x}} \quad (556)$$

Alors $\{f, g\}_{\vec{y}} = \{f, g\}_{\vec{x}}$

En particulier

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij} & \{Q_i, P_i\} &= \delta_{ij} \\ \{q_i, q_j\} &= 0 & \{Q_i, Q_j\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 & \{P_i, P_j\} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \quad (557)$$

On peut vérifier si une transformation est canoniques de trois façons :

1. par intégration : à partir, pour exemple, de

$$\begin{cases} p_i = p_i(\{q_i\}, \{Q_i\}, t) \\ P_i = P_i(\{q_i\}, \{Q_i\}, t) \end{cases} \quad \text{on essaye de trouver } F_1(\{q_i\}, \{Q_i\}, t) \quad (558)$$

si elle existe alors la transformation est, par construction, canonique. Bien évidemment on peut le faire par biais de F_2, F_3 ou F_4 , selon laquelle qui est plus appropriée.

2. On calcule $\underline{\underline{M}}$ et on vérifie si $\underline{\underline{M}} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}}^\top = \underline{\underline{J}}$ (ou $\underline{\underline{M}}^\top \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}$)
3. On calcule $\{Q_i, Q_j\}, \{P_i, P_j\}, \{Q_i, P_j\}$ pour tous les couples et on vérifie qu'elles donnent les bons résultats

Matrices symplectiques

Le matrices qui obéissent la propriété $\underline{\underline{M}}\underline{\underline{J}}\underline{\underline{M}}^\top = \underline{\underline{J}}$ sont appelées "symplectiques" et elles forment le groupe symplectiques $S_{p6N}(\mathbb{R})$ (éléments des matrices réels)

1. $\underline{\underline{1}}$ est part du groupe $\underline{\underline{1}}\underline{\underline{J}}\underline{\underline{1}}^\top = \underline{\underline{J}}$ triviale

2. $\underline{\underline{M}}^{-1}$ est part du groupe

$$\underline{\underline{M}}\underline{\underline{J}}\underline{\underline{M}}^\top = \underline{\underline{J}} \xrightarrow[\underline{\underline{M}}^{-1} \text{ à gauche}]{\quad} \underline{\underline{J}}\underline{\underline{M}}^\top = \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{J}} \xrightarrow[(\underline{\underline{M}}^\top)^{-1} \text{ à droite}]{\quad} \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{J}}(\underline{\underline{M}}^\top)^{-1} \quad (559)$$

3. si $\underline{\underline{M}}_1$ et $\underline{\underline{M}}_2$ sont part du groupe, alors $\underline{\underline{M}}_1\underline{\underline{M}}_2$ est part du groupe

$$(\underline{\underline{M}}_1\underline{\underline{M}}_2\underline{\underline{J}}\underline{\underline{M}}_1\underline{\underline{M}}_2)^\top = \underline{\underline{M}}_1\underline{\underline{M}}_2\underline{\underline{J}}\underline{\underline{M}}_2^\top\underline{\underline{M}}_1^\top = \underline{\underline{M}}_1\underline{\underline{J}}\underline{\underline{M}}_1^\top = \underline{\underline{J}} \quad (560)$$

4. La multiplication est associative (évident pour des matrices)

Le déterminant d'une matrice symplectique $\underline{\underline{M}}$ est unitaire $\det \underline{\underline{M}} = 1$

En effet :

$$\det(\underline{\underline{M}}\underline{\underline{J}}\underline{\underline{M}}^\top) = \det \underline{\underline{J}} \quad (561)$$

$$\Rightarrow \det(\underline{\underline{M}}) \cdot \det(\underline{\underline{J}}) \cdot \det(\underline{\underline{M}}^\top) = \det \underline{\underline{J}} \quad (562)$$

$$\Rightarrow \det(\underline{\underline{M}}) \cdot \det(\underline{\underline{M}}^\top) = 1 \quad (563)$$

Donc $[\det(\underline{\underline{M}})]^2 = 1 \Rightarrow \det(\underline{\underline{M}}) = \pm 1$

Mais on peut associer $\det(\underline{\underline{M}})$ à une fonction génératrice $F_2(\{q_i\}, \{P_i\})$ telle que

$$F_2(\{q_i\}, \{P_i\}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} F_2(\{q_i\}, \{P_i\}, \varepsilon) \quad (564)$$

avec

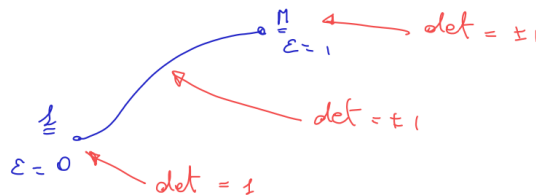
$$F_2(\{q_i\}, \{P_i\}, \varepsilon) = \varepsilon(F_2 - \sum_i q_i P_i) + \sum_i q_i P_i \quad (565)$$

Mais dans le cas $\varepsilon = 0$ on a

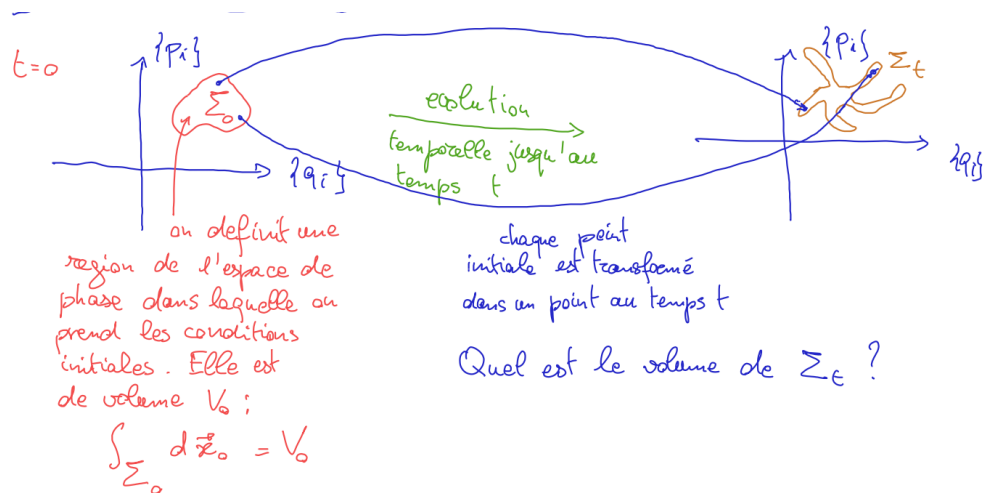
$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2(\varepsilon=0)}{\partial q_i} = P_i \\ Q_i = \frac{\partial F_2(\varepsilon=0)}{\partial P_i} = q_i \end{cases} \quad \text{qui est l'identité} \quad (566)$$

Donc on a une matrice symplectique $\underline{\underline{M}}(\varepsilon)$ qui eset l'identité pour $\varepsilon = 0$ (donc $\det(\underline{\underline{M}}(0)) = 1$)

Graphiquement, dans l'espace des matrices



Par continuité (les matrices sont contines en ε), le déterminant ne peut pas sauter de $+1$ à -1 , et donc $\boxed{\det \underline{\underline{M}} = 1}$



Théorème de Liouville

$$V_t = \int_{\Sigma_t} d\vec{x}_t = \int_{\Sigma_0} \overbrace{|\det \underline{\underline{M}}|}^{=1} d\vec{x}_0 = \int_{\Sigma_0} d\vec{x}_0 = V_0 \quad (567)$$

Où l'on a utilisé $\vec{x}_t = \vec{x}_t(\vec{x}_0, t)$ dans la deuxième égalité. C'est une transformation canonique ! Donc on peut changer de variables : $\vec{x}_t \rightarrow \vec{x}_0$, au prix de tenir compte du déterminant de la matrice Jacobienne, $\det \underline{\underline{M}}$

Don, un système régit par une évolution canonique préserve les volumes dans l'espace de phase.

4 Formalisme de Hamilton-Jacobi

4.1 Hamilton-Jacobi 1

On sait que si $K = \text{const}$ ($= 0$ pour simplicité), alors

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \end{cases} \quad \text{sont les équations les plus simples à résoudre} \quad (568)$$

Alors on peut poser le problème suivant : existe-t-elle une transformation canonique telle que $K = 0$? Traditionnellement on cherche une transformation du type $F_2(\{q_i\}, \{P_i\}, t)$ pour plusieurs raisons :

1. L'identité est $F_2(\{q_i\}, \{P_i\}, t) = \sum_i q_i P_i$ et a une forme particulièrement simple avec F_2 [Mais il faut rappeler que, donné F_2 , la même transformation peut être engendrée par F_2, F_3 ou F_4 trouvées par transf. de Legendre]
2. pour ce que nous allons voir ci-dessous

On va poser le problème

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad (569)$$

Mais

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad (570)$$

ici il faut substituer $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ pour obtenir

$$H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right\}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad (571)$$

Puisque F_2 dépend seulement de $\{q_i\}, \{P_i\}$ et t , il s'agit d'une équation différentielle aux dérivées partielles à résoudre en $\{q_i\}$ et t .

Sans se plonger dans la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles, on peut en dire quelque chose : Pour chaque $\frac{\partial F_2}{\partial q_i}$, l'intégration nécessite une constante d'intégration :

$$\frac{df}{dx} \longrightarrow f(x) = \int_{x_0}^x \frac{df}{dx'} dx' + \underbrace{f(x_0)}_{\text{à connaître}} \quad (572)$$

$f(x_0)$ doit être une constante pour toutes les valeurs de x , car

$$f(x_1) = \int_{x_0}^{(x_1)} \frac{df}{dx'} dx' + \underbrace{f(x_0)}_{\text{identique}} \quad f(x_2) = \int_{x_0}^{(x_2)} \frac{df}{dx'} dx' + \underbrace{f(x_0)}_{\text{identique}} \quad (573)$$

Donc, si on traduit en F_2 , cela veut dire que les constantes que l'on doit utiliser doivent être constantes pour toute la trajectoire.

Donc, on réécrit

$$H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial f}{\partial q_i}\right\}, t\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{on a appelé } f \text{ la solution} \quad (574)$$

et on a besoin de $3N + 1$ constantes (une pour chaque $\frac{\partial}{\partial q_i}$ et une pour $\frac{\partial}{\partial t}$; si le système était en 2D, on aurait $2N + 1$ constantes, etc... ; si on avait 3D mais avec des contraintes, on aurait $3N - k + 1$ constantes; en générale, on a besoin d'un nombre de constantes égal au nombre de degré de liberté $+ 1$).

Important : la solution existe seulement si on a un nombre suffisant de constantes, qui doivent être constantes tout au long de la trajectoire; elles doivent être des constantes du mouvements !

D'abord on remarque que S entre dans l'équation seulement à travers ses dérivées. Donc on peut écrire

$$f\left(\{q_i\}, \underbrace{\{c_i\}}_{i \rightarrow 3N+1}, t\right) = S\left(\{q_i\}, \underbrace{\{c_i\}}_{i \rightarrow 3N}, t\right) + c_{3N+1} \quad (575)$$

La dernière constante c_{3N+1} est mathématiquement nécessaire pour définir de manière complète la solution, mais elle est, physiquement non-nécessaire !

Pour rappel, la physique dépend uniquement des dérivées de f , et donc la constante c_{3N+1} ne compte pas.

On revient sur la raison pour laquelle on choisit F_2 (raison 2) : typiquement, H est non-linéaire en $\{p_i\}$ d'une façon simple (p_i^2); par contre elle peut être non-linéaire dans les $\{q_i\}$ de façon compliquée (dépend de la forme de $V(\{q_i\})$). Donc les dérivées partielles par rapport aux q_i interviennent de manière simple en F_2 mais les dérivées par rapport à $\frac{\partial}{\partial p_i}$ (qu'on utiliserait en F_3 et F_4) interviendrait par biais du potentiel : $V(\{\frac{\partial F}{\partial p_i}\})$, potentiellement compliqué.

Finalement, on revient à

$$\boxed{H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial S}{\partial q_i}\right\}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \quad \text{appelée l'équation de Hamilton-Jacobi} \quad (576)$$

La solution est $S(\{q_i\}, \{c_i\}, t)$, mais on sait que S est une " F_2 ", donc elle devrait être $S(\{q_i\}, \{P_i\}, t)$. Mais on sait aussi que $K = 0$ (par construction de Hamilton-Jacobi) et donc

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = 0 \\ \dot{P}_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_i = Q_i(0) \\ P_i = P_i(0) \end{cases} \quad (577)$$

avec les P_i sont des constantes du mouvement, donc on peut les utiliser comme $\{c_i\}$!!!

On remet tout ensemble par biais d'un exemple:

l'oscillateur harmonique (1D)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (578)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi est

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (579)$$

Donc on peut procéder par séparation des variables (car H ne dépend pas de t : système isolé !)

$$S_Q(q, c) + S_t(t) \quad (580)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_q}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{\partial S_t}{\partial t} = 0 \quad (581)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_q}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2}_{\text{dépend seulement de } q} = \underbrace{-\frac{\partial S_t}{\partial t}}_{\text{dépend seulement de } t} \quad (582)$$

Les deux cotés de l'égalité, dépendant de variables différentes, sont donc égal à une même constante.

$$\begin{cases} \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_q}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E (= H) \\ -\frac{\partial S_t}{\partial t} = E \end{cases} \quad (583)$$

H est conservée car système isolé ! Voici la constante nécessaire pour résoudre Hamilton-Jacobi et qui est une constante du mouvement.

Solution :

$$S_t = -Et + S_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial S_q}{\partial q} = \pm \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \quad (584)$$

question : le signe est-il ambigu ? ou est-ce physiquement raisonnable d'avoir les deux ?

Rappelons que

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial S_q}{\partial q} \quad (585)$$

donc le $\pm$ nous dit qu'on peut avoir la même énergie cinétique ($p^2 \rightarrow \left(\frac{\partial S_q}{\partial q}\right)^2$) avec la même $|p|$ indépendamment du signe ! Donc on peut choisir. on va l'utiliser dans quelques instant.

On répète :

$$\frac{\partial S_q}{\partial q} = \pm \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \quad (586)$$

et alors

$$S_q(q) = \pm \int_{\bar{q}}^q \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2} dq' + S_q(\bar{q}, E) \quad (587)$$

Le choix arbitraire de $\bar{q}$ est compensé avec le terme supplémentaire.

Note : $2mE - m^2\omega^2 q^2 = 2m(E - 1/2m\omega^2 q^2) = 2mT > 0$
avec T l'énergie cinétique. Donc la racine est bien définie.

Donc finalement on a

$$S(q, \underbrace{E}_{c_1}, c_2, t) = \pm \int_{\bar{q}}^q \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2} dq' - Et + S_t(0) + \underbrace{S_q(\bar{q}, E)}_{c_2} \quad (588)$$

mais on sait que $S = S(q, P, t)$ car de type F_2 , donc $P = E$, et finalement

$$S(q, P, t) = \pm \int_{\bar{q}}^q \sqrt{2mP - m^2\omega^2 q'^2} dq' - Pt + S_t(0) + \underbrace{S_q(\bar{q}, E)}_{c_2 \text{ à négliger ?}} \quad (589)$$

D'abord on vérifie que

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = \underbrace{H}_{=E=P} - P = P - P = \boxed{0 = K} \text{ ok} \quad (590)$$

Ensuite

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \pm \int_0^q \frac{\frac{1}{2}2m}{\sqrt{2mP - m^2\omega^2 q'^2}} dq' - t + \frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P} \quad (591)$$

$$= \pm \sqrt{\frac{m}{2P}} \int_0^q \frac{1}{\sqrt{1 - \underbrace{\frac{m\omega^2}{2P} q'^2}_{<1}}} dq' - t + \frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P} \quad (592)$$

On substitue

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q' \quad \rightarrow \quad dq' = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \cos \theta d\theta \quad (593)$$

et donc on a

$$Q = \pm \sqrt{\frac{m}{2P}} \int_0^{\text{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q\right)} \frac{\sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \cos \theta}{\cos \theta} d\theta - t \quad (594)$$

$$= \pm \sqrt{\frac{m}{2P}} \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \int_0^{\text{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q\right)} d\theta - t + \frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P} \quad (595)$$

$$= \pm \frac{1}{\omega} \text{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q\right) - t + \frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P} \quad (596)$$

Mais on sait que $Q(t)$ est constante, donc on peut le calculer au temps $t = 0$

$$Q(0) = \pm \frac{1}{\omega} \operatorname{asin} \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q(0) \right) + \frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P} = Q(t) \quad (597)$$

donc

$$\pm \frac{1}{\omega} \operatorname{asin} \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q(0) \right) + \cancel{\frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P}} = \pm \frac{1}{\omega} \operatorname{asin} \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q(t) \right) + \cancel{\frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P}} - t \quad (598)$$

Les deux termes égaux s'annulent car ils viennent de c_2 , donc on peut le négliger, comme prévu !

et alors

$$\operatorname{asin} \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q(t) \right) = \operatorname{asin} \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q(0) \right) \pm t\omega \quad (599)$$

d'où l'on tire

$$q(t) = q(0) \cos(\omega t) \pm \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2P} q^2(0)} \sin(\omega t) = \quad (600)$$

$$= q(0) \cos(\omega t) \pm \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} \sqrt{P - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2(0)} \sin(\omega t) = \quad (601)$$

$$= q(0) \cos(\omega t) \pm \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} \sqrt{\frac{p^2(0)}{2m}} \sin(\omega t) = q(0) \cos(\omega t) \pm \frac{|P(0)|}{m\omega} \sin(\omega t) \quad (602)$$

Où l'on a utilisé que $P = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \text{const}$. Il y a une ambiguïté de signe dans la dernière égalité qu'il faut résoudre selon le signe de $p(0)$.

En suite il faut déterminer $p(t)$:

$$p(t) = \frac{\partial S}{\partial q} = \pm \sqrt{2mP - m^2\omega^2 q^2} \quad (603)$$

(La dérivée par rapport à q du reste est nulle.)

et donc

$$p(t) = \pm \sqrt{2m \left(\frac{p(0)^2}{2m} + \frac{1}{2} m^2 \omega^2 q(0)^2 \right) - m^2 \omega^2 q(0)^2 \cos^2(\omega t) - m^2 \omega^2 \frac{p(0)^2}{m^2 \omega^2} \sin^2(\omega t) \pm 2m\omega q(0)|p(0)| \sin(\omega t) \cos(\omega t)} \quad (604)$$

$$= \pm \sqrt{p(0)^2 \cos^2(\omega t) \mp 2m\omega q(0)|p(0)| \sin(\omega t) \cos(\omega t) + m^2 \omega^2 q(0)^2 \sin^2(\omega t)} \quad (605)$$

$$= \pm |p(0)| \cos(\omega t) \mp m\omega q(0) \sin(\omega t) \quad (606)$$

Encore une fois on insiste que l'ambiguïté du signe est intrinsèque à la forme quadratique de l'énergie cinétique, et elle peut être résolue seulement par biais de la connaissance du signe de $p(0)$.

On peut résumer ce que l'on a fait, la procédure se généralise à tout type de cas lorsqu'on fait Hamilton-Jacobi :

1. On écrit

$$H \left(\{q_i\}, \left\{ \frac{\partial S}{\partial q_i} \right\}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (607)$$

2. On résout et on trouve $S(\{q_i\}, \{P_i\}, t)$ avec la relation $\{P_i\} = \{c_i\}$ constantes nécessaires à résoudre le problème et qui correspondent aux quantités conservées. Il y en a $3N$!

3. On trouve

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = Q_i(\{q_i\}_i, \{P_i\}, t) \quad (608)$$

mais $\dot{Q}_i = 0$, donc $\boxed{Q_i(\{q_i\}, \{P_i\}, t) = Q_i(\{q_i(0)\}, \{P_i\}, 0)}$

4. L'inversion de cette expression nous donne $q_i(t) = q_i(\{Q_i\}, \{P_i\}, t)$ où $\{Q_i\}$ sont donnés à partir des conditions initiales et $\{P_i\}$ quantités conservées.

$\{Q_i\}, \{P_i\}$ sont toutes déterminées à partir de $\{q_i(0)\}$ et $\{p_i(0)\}$

5. finalement on a

$$P_i(t) = \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(\{q_i(t)\}, \{P_i\}, t) \quad (609)$$

Pour résumer

$$\begin{array}{ccc} H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) & \xrightarrow{\text{trans. canonique dépendant de } t} & K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right. & \xleftarrow{\text{transf. canonique inverse dépendant de } t} & \left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_i = 0 \\ \dot{P}_i = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_i(t) = Q_i(0) \\ P_i(t) = P_i(0) \end{array} \right. \end{array} \quad (610)$$

Donc, on a en effet caché l'évolution temporelle du système dans la fonction génératrice, donc dans la transf. canonique. Ce n'est pas surprenant, car on sait que l'évolution du système est une transformation canonique.

On fait un pas en arrière pour discuter les conséquences de ce que l'on a fait.

Si on peut résoudre Hamilton-Jacobi, c'est à dire trouver S, alors il suffit de calculer Q_i et P_i à $t = 0$, et en sachant qu'ils ne changent pas au cours du temps, par inversion de la transformation on trouve explicitement $q_i(t)$ et $p_i(t)$. On dit qu'on a résolu explicitement le système.

On se pose le problème inverse : pourrait-on résoudre explicitement le système, c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i(t) = q_i(t, \{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}) \\ p_i(t) = p_i(t, \{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}) \end{array} \right. \quad (611)$$

mais pas résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi ?

⇒ en effet non !

Si on pouvait résoudre explicitement les équations canonique de Hamilton, on aurait en effet trouvé la transformation canonique explicite qui correspond à l'évolution du système. Donc on aurait aussi, par inversion :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i(0) = q_i(\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}, t) = Q_i \\ p_i(0) = p_i(\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}, t) = P_i \end{array} \right. \quad (612)$$

et on sait que, vu qu'il s'agit d'une transformation canonique, on peut trouver, par intégration, $F_2(\{q_i\}, \{P_i\}, t)$. Donc, on aurait trouvé un F_2 tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_i = 0 \\ \dot{P}_i = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) = 0 \quad (613)$$

(la première accolade est évidente car les conditions initiales ne changent pas au cours du temps)

Mais ce F_2 serait la solution de Hamilton-Jacobi. D'un autre coté, la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dit que pour résoudre Hamilton-Jacobi, il est nécessaire d'avoir $3N$ constantes du mouvement. Alors on peut trouver une solution explicite du mouvement (c'est à dire : $q_i(t)$ et $p_i(t)$ explicite) si et seulement si il existe au moins $3N$ constantes du mouvement. Si elles n'existent pas, alors on ne peut pas avoir une solution explicite.

Attention ! La solution des équations canoniques existe et elle est unique, car $\{q_i(0)\}$ et $\{p_i(0)\}$ sont connues. Tout simplement, on ne peut pas écrire une forme explicite

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i(t) = q_i(\{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}, t) \\ p_i(t) = p_i(\{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}, t) \end{array} \right. \quad (614)$$

La conséquence est qu'on devra utiliser des solutions numériques.

Est-il commun d'avoir $3N$ constantes du mouvement ?

Intuitivement :

- Si le système est isolé, H est conservée (1 quantité conservée)

- Si il y a invariance par translation, $\vec{P}$ (3 quantités conservées)
- Si il y a invariance par rotation, $\vec{L}$ (3 quantités conservées)

Il est rare qu'on ait d'autres quantités (sauf pour des systèmes séparables, voir plus loin).

Donc, la plupart des systèmes avec plus de deux particules (donc avec $3N \geq 9 > 7 (= 1 + 3 + 3)$) n'admettent pas de solution explicite (on dit qu'ils ne sont pas intégrables)

4.2 Hamilton-Jacobi 2

L'équation de Hamilton-Jacobi est

$$H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial S}{\partial q_i}\right\}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (615)$$

On a vu que, si le système est isolé, on peut trouver une solution ou celle-ci peut s'écrire en séparant le temps des autres variables :

$$S(\{q_i\}, \{c_i\}, t) = S_q(\{q_i\}, \{c_i\}) + s_t(t, \{c_i\}) \quad (616)$$

et on arrive aux deux équations

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = -E \quad H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial S_q}{\partial q_i}\right\}\right) = E \quad (617)$$

où E est l'énergie, qui est constante car le système isolé.

Traditionnellement, cette équation s'écrit avec " à la place de S_q et on l'appelle "équation caractéristique de Hamilton-Jacobi".

$$H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial W_q}{\partial q_i}\right\}\right) = E \quad (618)$$

Si la solution de cette équation existe, donc si on a les $3N$ constantes du mouvement, on aurait la fonction génératrice de la transformation qui est W.

De plus $K = H + \frac{\partial W}{\partial t}$

mais W ne dépend pas de t, par construction donc

$$K = H(\{q_i\}, \{P_i\}) = E \quad \text{équation caractéristique de H.-J.} \quad (619)$$

D'un autre coté on sait que les constantes du mouvement deviennent les nouvelles impulsions : $E = P_1$ ("1" par tradition). Cela veut dire que $K = P_1$ et donc les équations canoniques pour les nouvelles variables sont

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = \frac{\partial P_1}{\partial P_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i > 1 \end{cases} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = -\frac{\partial P_1}{\partial Q_i} = 0 \end{cases} \quad (620)$$

La solution est donc

$$\begin{cases} Q_1(t) = t + Q_1(0) \\ Q_i(t) = Q_i(0) \quad \text{si } i > 1 \\ P_i(t) = P_i(0) \end{cases} \quad (621)$$

Il s'agit d'une solution à peine plus compliquée que toutes constantes, mais toujours simple !

Le fait que $W(\{q_i\}, \{P_i\})$ ne dépende pas du temps est avantageux pour comprendre une différence fondamentale entre un système intégrable et un système qui n'est pas intégrable.

D'abord :

$$\begin{cases} Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}(\{q_i\}, \{P_i\}) \\ p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}(\{q_i\}, \{P_i\}) \end{cases} \quad (622)$$

implique que la relation entre $\{q_i\}, \{p_i\}$ et $\{Q_i\}, \{P_i\}$ engendrée par la transformation canonique ne dépende pas explicitement du temps. C'est à dire :

$$\begin{cases} Q_i(t) = \delta_{i,1}t + Q_i(\{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}) \\ P_i(t) = P_i(\{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}) \end{cases} \quad (623)$$

et en revenant sur $\{q_i\}, \{p_i\}$:

$$\begin{cases} q_i(t) = q_i(\{Q_i(t)\}, \{P_i(t)\}) \\ p_i(t) = p_i(\{Q_i(t)\}, \{P_i(t)\}) \end{cases} \quad (624)$$

seul Q_1 dépend en effet du temps t et la forme explicite de la trajectoire, $\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}$ est déterminée par une fonction (en générale non linéaire) appliqué à $Q_1(t) = t + Q_1(0)$

En notation compacte :

$$\begin{aligned} \vec{x} &\longrightarrow \vec{y} \quad \text{avec} \\ \vec{y} &= \tilde{f}(\vec{x}) \quad (\text{engendré par } W) \\ \vec{x} &= \tilde{f}^{-1}(\vec{y}) \end{aligned} \quad (625)$$

Les $\vec{y}$ satisfont les équations canoniques

$$\dot{\vec{y}} = \vec{\omega} \quad \text{avec} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (626)$$

(où dans $\vec{\omega}$, le 1 est pour Q_1 , il s'en suit $3N - 1$ fois 0 pour les Q_i avec $i > 1$, puis de $3N$ fois 0 pour les P_i)

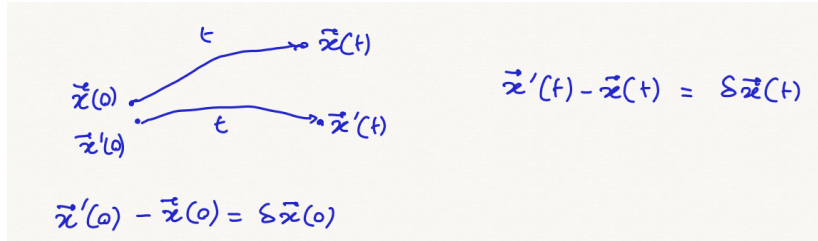
la solution est :

$$\vec{y}(t) = \vec{\omega}t + \vec{y}(0) = \vec{\omega}t + \tilde{f}(\vec{x}(0)) \quad (627)$$

et donc

$$\vec{x}(t) = \tilde{f}^{-1}(\vec{\omega}t + \tilde{f}(\vec{x}(0))) \quad (628)$$

On pose la question : deux trajectoire partent des conditions initiales $\vec{x}(0)$ et $\vec{x}'(0)$, qui sont différentes par $\delta\vec{x}(0)$



Comment se comporte $\delta\vec{x}(t)$? Est-il du même ordre que $\delta\vec{x}(0)$, plus grand ou plus petit ?

La trajectoire du système est complètement déterminée par les conditions initiales, et c'est une transformation canonique, donc

$$\vec{x}(t) = \vec{g}(\vec{x}(0), t) \quad \text{et} \quad \vec{x}'(t) = \vec{g}(\vec{x}'(0), t) \quad (629)$$

La deuxième est aussi

$$\vec{x}(t) + \delta\vec{x}(t) = \vec{g}(\vec{x}(0) + \delta\vec{x}(0), t) \quad (630)$$

On peut développer à droite par $\vec{x}(0)$:

$$\vec{x}(t) + \delta\vec{x}(t) = \underbrace{\vec{g}(\vec{x}(0), t)}_{\vec{x}(t)} + \underbrace{\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}(0), t) \cdot \delta\vec{x}(0)}_{\underline{M}(\vec{x}(0), t)} \quad (631)$$

avec $\underline{M}$ matrice symplectique !

Donc, si on l'applique à t et $t + \Delta t$

$$\delta\vec{x}(t) = \underline{M}(\vec{x}(0), t) \cdot \delta\vec{x}(0) \quad (632)$$

Maintenant, on applique la même relation entre t et $t + \Delta t$:

$$\delta\vec{x}(t + \Delta t) = \underline{M}(\vec{x}(t), \Delta t) \cdot \delta\vec{x}(t) \quad (633)$$

on prend $t = \Delta t$ petit et on développe $\underline{M}(\vec{x}(0), t)$

$$\underline{M}(\vec{x}(0), \Delta t) \simeq \underbrace{\underline{I}}_{\Delta t=0} + \underline{M}'(\vec{x}(0)) \cdot \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (634)$$

Donc

$$\delta \vec{x}(t + \Delta t) = \delta \vec{x}(t) + \Delta t \underline{\underline{M'}}(\vec{x}(t)) \cdot \delta \vec{x}(t) \quad (635)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \vec{x}(t + \Delta t) - \delta \vec{x}(t)}{\Delta t} = \underline{\underline{M'}}(t) \cdot \delta \vec{x}(t) \quad (636)$$

$$\Rightarrow \delta \dot{\vec{x}} = \underline{\underline{M'}}(t) \cdot \delta \vec{x} \quad (\Delta t \rightarrow 0) \quad (637)$$

Dans un voisinage de t on peut considérer $\underline{\underline{M'}}(t)$ constante et on a donc que, si on développe $\delta \vec{x}$ en vecteurs propres de $\underline{\underline{M'}}$,

$$\delta \vec{x} = \sum_k c_k(t) \vec{v}_k \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{M'}} \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k \quad (638)$$

et la solution est

$$\delta \vec{x}(t') = \sum_k c_k(t) e^{\lambda_k(t'-t)} \vec{v}_k \quad (639)$$

Que sait-on des λ_k ?

λ_k sont les valeurs propres de $\underline{\underline{M'}}$, mais on se rappelle que $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{M'}} \cdot \Delta t$ et en utilisant que $\det \underline{\underline{M}}$ est le produit des valeurs propres

$$\det \underline{\underline{M}} = 1 = \prod_k (1 + \lambda_k \Delta t) \approx 1 + \left(\sum_k \lambda_k \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (640)$$

Donc $\sum_k \lambda_k = 0$ pour garder $\det \underline{\underline{M}} = 1$

Il suffit un $\lambda_k < 0$ pour qu'il existe un k' tel que $\lambda_{k'} > 0$. Mais si $\exists k'$ t.q. $\lambda_{k'} > 0$ alors $\delta \vec{x}(t')$ diverge exponentiellement de $\delta \vec{x}(t)$.

Autrement dit, deux trajectoires qui partent proche l'une de l'autre peuvent s'éloigner exponentiellement rapidement l'une de l'autre, avec un taux qui est déterminé par le plus grand des $\{\lambda_k\}$ [les $\{\lambda_k\}$ s'appellent exposants de Lyapounov].

Qu'est-ce qui se passe pour un système intégrable isolé ?

Dans ce cas on rappelle que

$$\vec{x}(t) = \vec{f}^{-1}(\vec{y}(t)) = \vec{f}^{-1}(\vec{\omega}t + \vec{y}(0)) = \vec{f}^{-1}(\vec{\omega}t + \vec{f}(\vec{x}(0))) \quad (641)$$

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}^{-1}(\vec{y}'(t)) = \vec{f}^{-1}(\vec{\omega}'t + \vec{y}'(0)) = \vec{f}^{-1}(\vec{\omega}'t + \vec{f}'(\vec{x}'(0))) \quad (642)$$

$$= \vec{f}^{-1}(\vec{\omega}'t + \vec{f}(\vec{x}(0) + \delta \vec{x}(0))) \quad (643)$$

On développe $\vec{x}'(t)$ par rapport à $\delta \vec{x}(0)$:

$$\vec{x}(t) + \delta \vec{x}(t) = \underbrace{\vec{f}^{-1}(\vec{y}(t))}_{\vec{x}(t)} + \frac{\partial \vec{f}^{-1}}{\partial \vec{y}} \bigg|_{\delta \vec{y}=0} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \bigg|_{\delta \vec{x}=0} \cdot \delta \vec{x}(0) + \frac{\partial \vec{f}^{-1}}{\partial \vec{y}} \bigg|_{\delta \vec{y}=0} \underbrace{\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \vec{x}} \bigg|_{\delta \vec{x}=0}}_{=0, \text{ car } \vec{\omega} \text{ const}} \cdot t \delta \vec{x}(0) \quad (644)$$

Et enfin on a

$$\delta \vec{x}(t) = \underbrace{\frac{\partial \vec{f}^{-1}}{\partial \vec{y}} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}}_{\underline{\underline{M'}} \cdot \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{I}}} t \delta \vec{x}(0) = t \delta \vec{x}(0) \quad (645)$$

Le résultat est que

$$\delta \vec{x}(t) = t \delta \vec{x}(0) \quad (646)$$

Mais dans ce cas on a pas demandé Δt petit !!! Donc les deux trajectoires restent toujours linéairement proches l'une à l'autre.

Pour résumer :

Système intégrables : une petite différence initiale, ou une petite erreur pendant une intégration numérique, reste petite ! (on peut faire des prédictions !)

Système non-intégrables : une petite différence initiale, ou une erreur d'intégration numérique va exploser exponentiellement, avec un taux qui est $\max_k \lambda_k$ (il est difficile de faire des prédictions !)

Les équations des fluides qui gèrent les prévisions météo ne sont pas intégrables ! Donc les prédictions perdent de fiabilité après un temps $\frac{1}{\lambda_{max}} \approx 1$ semaine.

Prenons le système terre-lune-soleil :

$$\left. \begin{array}{l} E \text{ est conservé} \\ \vec{P} \text{ est conservé} \\ \vec{L} \text{ est conservé} \end{array} \right\} 7 \text{ constantes du mouvement} \quad (647)$$

Mais il y a 9 degrés de liberté $\Rightarrow$ système non-intégrable !!!

Donc tôt ou tard notre capacité de prédire, par exemple, les éclipses, va tomber ... après des millions d'années ($\frac{1}{\lambda_{max}}$)
Cette perte de capacité de faire des prédictions pour des systèmes non-intégrables est à la base de systèmes chaotiques : le chaos déterministe est un système déterministe mais tel qu'il est impossible de faire des prédictions et le système se comporte comme s'il était aléatoire.

4.3 Vecteurs propres d'une matrice

Pour simplicité on considère une matrice diagonalisable, A , réelle.

Les vecteurs propres "droites" $\vec{v}_k$ sont

$$A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k \quad (648)$$

Les vecteurs propres "gauches" $\vec{u}_k$ sont

$$\vec{u}_k^\top A = \lambda_k \vec{u}_k^\top \quad (649)$$

Ils existent et la preuve de leur existence est facile à démontrer (au sens pas nécessairement rigoureux). Les valeurs propres sont les zéros du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$.

Si on prend le polynôme caractéristique de la transposé

$$\det(A^\top - \lambda I) = \det[(A - \lambda I)^\top] = \det(A - \lambda I) \quad (650)$$

Donc A et $A^\top$ ont les mêmes valeurs propres. Alors

$$\vec{u}_k^\top A = \lambda_k \vec{u}_k^\top \rightarrow A^\top \vec{u}_k = \lambda_k \vec{u}_k \quad (651)$$

Quelle est la relation entre $\{\vec{u}_k\}$ et $\{\vec{v}_k\}$?

On prend k et k'

$$A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k \rightarrow \vec{u}_{k'}^\top A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{u}_{k'}^\top \vec{v}_k \quad (652)$$

$$\vec{u}_{k'}^\top A = \lambda_{k'} \vec{u}_{k'}^\top \rightarrow \vec{u}_{k'}^\top A\vec{v}_k = \lambda_{k'} \vec{u}_{k'}^\top \vec{v}_k \quad (653)$$

on soustrait les deux équations

$$0 = (\lambda_k - \lambda_{k'}) \vec{u}_{k'}^\top \cdot \vec{v}_k \quad (654)$$

Donc $\vec{u}_{k'}$ et $\vec{v}_k$ sont orthogonaux si $k \neq k'$ (ici pour simplicité on fait l'hypothèse que λ_k ne soit pas dégénéré, c'est à dire qu'il a multiplicité 1 pour chaque k ; le cas échéant est plus difficile à démontrer, mais on peut le faire).

Si par contre $k = k'$

$$\vec{u}_k^\top A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{u}_k^\top \cdot \vec{v}_k \Rightarrow \vec{u}_k^\top \cdot \vec{v}_k \neq 0 \quad (655)$$

et puisque un vecteur propre est défini indépendamment de sa norme, on peut sans problème dire que

$$\vec{u}_{k'}^\top \cdot \vec{v}_k = \delta_{kk'} \quad (656)$$

Donc les vecteurs propres gauches et droites sont orthogonaux entre eux, mais

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_{k'}^\top \cdot \vec{u}_k \neq 0 \\ \vec{v}_{k'}^\top \cdot \vec{v}_k \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{L'orthogonalité est entre vecteurs propres droites et gauches !} \quad (657)$$

Finalement: on peut représenter un vecteur $\vec{x}$ comme combinaison linéaire des $\{\vec{v}_k\}$:

$$\vec{x} = \sum_k c_k \vec{v}_k \quad (658)$$

Les coefficients $\{c_k\}$ peuvent s'obtenir par produit scalaire avec $\vec{u}_k^\top$,

$$\vec{u}_k^\top \cdot \vec{x} = \sum_k c_k \vec{u}_k^\top \cdot \vec{v}_k = \sum_k c_k \delta_{kk'} = c_{k'} \quad (659)$$

Cas spéciale : matrice A symétrique

$$\vec{u}_k^\top A = \lambda_k \vec{u}_k^\top \Rightarrow A^\top \vec{u}_k = \lambda_k \vec{u}_k \stackrel{A^\top=A}{=} A \vec{u}_k = \lambda_k \vec{u}_k \quad (660)$$

et alors $\vec{u}_k = \vec{v}_k$ et les vecteurs propres forment un jeu de vecteurs orthonormaux.

4.4 Séparation des variables

Pour résoudre Hamilton-Jacobi, lorsque le système est isolé, on a utilisé la séparation des variables. Est-ce que l'on peut voir la séparation des variables de façon plus large ?

$$H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial S}{\partial q_i}\right\}, t\right) + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \quad (661)$$

Ecrivons le de façon plus générale

$$F\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial s}{\partial q_i}\right\}, t, \frac{\partial s}{\partial t}\right) = 0 \quad (662)$$

Si dans la structure de F on reconnaît qu'on peut grouper q_i et $\frac{\partial s}{\partial q_i}$ dans une fonction "isolé", alors on peut séparer q_i des autres et écrire

$$S(\{q_i\}, \{c_i\}, t) = S_i(\{q_i\}, \{c_i\}) + \tilde{S}(\{q_j\}_{/i}, t, \{c_i\}) \quad (663)$$

Pratiquement

$$F\left(\phi_i\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right), \{q_j\}_{/i}, t, \left\{\frac{\partial S}{\partial q_j}\right\}_{/j}, \frac{\partial S}{\partial t}, \{c_i\}\right) = 0 \quad (664)$$

avec séparation $S = S_i + \tilde{S}$ elle devient

$$F\left(\phi_i\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right), \{q_j\}_{/j}, t, \left\{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_j}\right\}_{/j}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}, \{c_i\}\right) = 0 \quad (665)$$

et donc

$$\begin{cases} \phi_i\left(q_i, \frac{\partial S_i}{\partial q_i}\right) = c_i \\ F\left(c_i, \{q_j\}_{/j}, t, \left\{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_j}\right\}_{/j}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}, \{c_i\}\right) = 0 \end{cases} \quad (666)$$

Lorsqu'on arrive à le faire pour toutes les variables, une après l'autre, on dit que le système est complètement séparable et on écrit la solution

$$S(\{q_i\}, \{c_i\}, t) = \sum_{k=1}^{3N} S_k(q_k, \{c_i\}) + s_t(t, \{c_i\}) \quad (667)$$

Comme on le voit, pour isoler à chaque tour une variable on a besoin d'une constante. Donc on peut séparer complètement un système si

1. il a la structure mathématique pour le faire
2. s'il y a $3N(+1)$ constantes qu'on peut utiliser

⇒ un système complètement séparable est intégrable. Vice-versa n'est pas nécessairement vrai.

Exemple 1 Oscillateur harmonique en 2D (1 particule de masse m)

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 \quad (668)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \quad (669)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - V(x, y) \quad (670)$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad (671)$$

$$\Rightarrow H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 \quad (672)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi est

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (673)$$

Si on ré-ordonne :

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (674)$$

qui devient

$$\phi_x \left(x, \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \phi_y \left(y, \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \phi_t \left(t, \frac{\partial S}{\partial t} \right) = 0 \quad (675)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_x &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 \\ \phi_y &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 \\ \phi_t &= \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \quad (676)$$

$$\Rightarrow S = S_x + S_y + S_t \quad (677)$$

$$\begin{aligned} \phi_x \left(x, \frac{\partial S_x}{\partial x} \right) + \phi_y \left(y, \frac{\partial S_y}{\partial y} \right) &= -\phi_t \left(t, \frac{\partial S_t}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \begin{cases} \phi_t \left(t, \frac{\partial S_t}{\partial t} \right) &= -E \quad [\text{on le savait déjà}] \\ \phi_x + \phi_y &= E \end{cases} \end{aligned} \quad (678)$$

En suite $\phi_x + \phi_y = E \Rightarrow \phi_x = E - \phi_y$ et donc

$$\begin{cases} \phi_x = E_x \\ \phi_y = E - E_x \end{cases} \quad (679)$$

Question : le système est isolé. Donc E est conservée. Comment sait-on que aussi E_x (et donc E_y) est conservé ? On peut facilement le démontrer car

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left[\frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 \right]}_{H_x} = \left\{ \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2, H \right\} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} \omega_x^2 x^2 \right] \quad (680)$$

$$= \{H_x, H\} + 0 = \{H_x, H_x + H_y\} \quad (681)$$

$$= \{H_x, H_x\} + \{H_x, H_y\} = 0 \quad (682)$$

Dans la dernière ligne, le premier terme s'annule par antisymétrie, le deuxième car $\{p_x, p_y\} = \{x, p_y\} = \{p_x, y\} = \{x, y\} = 0$

Donc $H_x = E_x$ est conservée.

Si les deux fréquences ω_x et ω_y sont égales, alors on dit que l'oscillateur est isotropique ($\omega_x = \omega_y = \omega$)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) \quad (683)$$

On peut passer au coordonnés polaires

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad (684)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (685)$$

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2) \quad (686)$$

On calcule les impulsions

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \end{aligned} \quad (687)$$

Donc

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (688)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi est donc

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (689)$$

On identifie :

$$\phi_\varphi \left(\varphi, \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) = \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \quad (690)$$

$$\phi_\varphi \left(\varphi, \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} \right) = \text{const} = l_z^2 \quad (\leftarrow p_\varphi^2) \quad (691)$$

est-elle conservée ? oui car le système est isotrope.

Et on a séparé la solution

$$S = S_\varphi + \tilde{S}(r, t) \quad (692)$$

En suite on a

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r} \right)^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0 \quad (693)$$

On identifie

$$\begin{cases} \phi_r \left(r, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r} \right)^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \\ \phi_t \left(t, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \end{cases} \quad (694)$$

Donc on peut aussi séparer r et t , et finalement on a

$$S = S_r + S_\varphi + S_t \quad (695)$$

Exemple 2 Coordonnées normales

On a vu que lorsqu'on est proches d'un point d'équilibre mécanique stable on peut développer le potentiel et, si on s'arrête au deuxième ordre, on arrive, après des opérations d'algèbre linéaire, à

$$L = \sum_k L_k = \sum_k \left[\frac{1}{2} \dot{Q}_k^2 - \frac{1}{2} \omega_k^2 Q_k^2 \right] \quad (696)$$

On peut passer au formalisme de Hamilton :

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = \dot{Q}_k \quad (697)$$

$$\Rightarrow H = \sum_k H_k = \sum_k \left[\frac{1}{2} P_k^2 + \frac{1}{2} \omega_k^2 Q_k^2 \right] \quad (698)$$

(On peut aisément vérifier que $\{Q_k, P_{k'}\} = S_{kk'}$, d'où on trouve que $H_k = E_k$ est conservée $\forall k$)

L'équation de Hamilton-Jacobi est alors

$$\sum_k \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial Q_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_k Q_k^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (699)$$

et il est facile de voir que

$$H_k \left(Q_k, \frac{\partial S}{\partial Q_k} \right) = \phi_k \left(Q_k, \frac{\partial S}{\partial Q_k} \right) \quad (700)$$

et donc $\sum_k \phi_k \left(Q_k, \frac{\partial S_k}{\partial Q_k} \right) + \frac{\partial S_t}{\partial t} = 0$

$$\begin{cases} \phi_k \left(Q_k, \frac{\partial S_k}{\partial Q_k} \right) = E_k \quad \forall k \\ \phi_t \left(t, \frac{\partial S_t}{\partial t} \right) = \frac{\partial S_t}{\partial t} = -E (= \sum_k E_k) \end{cases} \quad (701)$$

Avec $S = \sum_k S_k + S_t$

4.5 Solution de l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi

$$H \left(\{q_i\}, \left\{ \frac{\partial W}{\partial q_i} \right\} \right) = E \quad (702)$$

si on choisit $E = P_1$, on a, après la transformation, $K = P_1$

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = \frac{\partial P_1}{\partial P_i} = \delta_{i1} \Rightarrow Q_i(t) = \delta_{i1} \cdot t + Q_i(0) \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow P_i(t) = P_i(0) \end{cases} \quad (703)$$

Mais en réalité, la seule chose qu'on sait est que E est une constante, et on peut la mettre en relation avec toutes les constantes du mouvement de façon presque arbitraire, c'est à dire $K(\{P_i\}) = E(\{P_i\})$

Prenons comme exemple le cas de l'oscillateur harmonique en 2D

$$H = \underbrace{\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2}_{H_x} + \underbrace{\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2}_{H_y} = H_x + H_y = E_x + E_y \quad (704)$$

Lorsque on écrit l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi, on écrit

$$H \left(x, y, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y} \right) = E \quad (705)$$

Bien évidemment E est conservée, mais aussi E_x et E_y sont conservées. Donc on pourrait choisir

$$\begin{aligned} P_1 &= E \\ P_2 &= E_x \text{ (ou } E_y) \end{aligned} \quad \text{et alors} \quad K = P_1 \quad (706)$$

Mais on pourrait choisir

$$\begin{aligned} P_1 &= E_x \\ P_2 &= E_y \end{aligned} \quad \text{et alors} \quad K = P_1 + P_2 \quad (707)$$

On pourrait être même encore plus fous, et choisir

$$\begin{aligned} P_1 &= E_x^2 + E_y^2 \\ P_2 &= 2E_x E_y \end{aligned} \quad \text{et alors} \quad K = \sqrt{P_1 + P_2} \quad (708)$$

Vu que E_x et E_y sont constantes, alors aussi P_1 et P_2 sont constantes. Il est clair que ce choix n'est pas nécessairement le plus intelligent, mais il est, mathématiquement, légitime.

En générale on dira

$$E = \beta(\{P_i\}) = K(\{P_i\}) \quad (709)$$

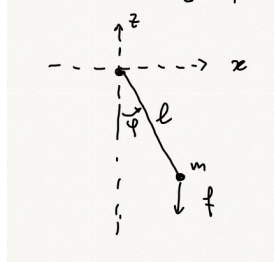
La conséquence est que, après la transformation, les équations canoniques de Hamilton pour $\{Q_i\}$ et $\{P_i\}$ sont

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = \omega_i = \frac{\partial \beta}{\partial P_i} \Rightarrow \begin{cases} Q_i(t) = \omega_i t + Q_i(0) \\ P_i(t) = P_i(0) \end{cases} \end{cases} \quad (710)$$

Toutes les $\{Q_i\}$ ont maintenant un comportement linéaire par rapport au temps (avant Q_1 était un peu privilégiée). Alors, pourquoi est-il utile d'enlargir le point de vu ? On va le voir avec les variables action-angle. D'abord il faut introduire le concept de portrait de phase

4.6 Le portrait de phase

Le portrait de phase est une représentation des familles de trajectoires possibles dans l'espace de phase pour un système. On va voir cela par le biais d'un exemple. Masse m attachée à une tige rigide de longueur l , soumise à la gravité



$$f = -\frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial z}(mgz) \Rightarrow V = mgz \quad (711)$$

$$\begin{aligned} x &= +l \sin \varphi & \dot{x} &= +l\dot{\varphi} \cos \varphi \\ z &= -l \cos \varphi & \dot{z} &= +l\dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned} \quad (712)$$

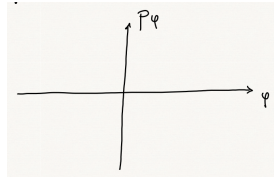
$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \quad V = -mgl \cos \varphi \quad (713)$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \quad (714)$$

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{ml^2} \quad (715)$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2} \frac{p_{\varphi}^2}{ml^2} - mgl \cos \varphi \Rightarrow \text{système isolé, donc } H = E \text{ conservée} \quad (716)$$

L'espace de phase du système est



Quelles sont les trajectoires possibles ?

On a deux cas possibles :

1. L'énergie du système est plus petite de l'énergie potentielle maximale, qui est atteinte pour $\varphi = \pi$

$$V(\pi) = mgl \quad (717)$$

Dans ce cas, la masse va atteindre le φ maximale telle que $V(\bar{\varphi}) = E$, et ensuite va revenir en arrière : mouvement périodique du type pendulum.

2. L'énergie du système est $E > mgl$: dans ce cas la masse peut bien arriver à $\varphi = \pi$ et même la dépasser

3. $E = V(\pi)$!

Cas 1

$$\frac{p_{\varphi}^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi = E \quad (718)$$

$$\Rightarrow p_{\varphi}^2 = 2ml^2(E + mgl \cos \varphi) \quad (719)$$

$$\Rightarrow p_{\varphi} = \pm \sqrt{2ml^2(E + mgl \cos \varphi)} = \pm \sqrt{2ml^2 E} \sqrt{1 + \frac{mg^2}{E} \cos \varphi} \quad (720)$$

Si $V(0) \leq V(\bar{\varphi}) (= E) < V(\pi)$ par définition du cas 1

$$\Rightarrow -mgl \leq -mgl \cos \bar{\varphi} < mgl \Rightarrow 1 \geq \cos \bar{\varphi} > -1 \quad (721)$$

Et donc la racine existe

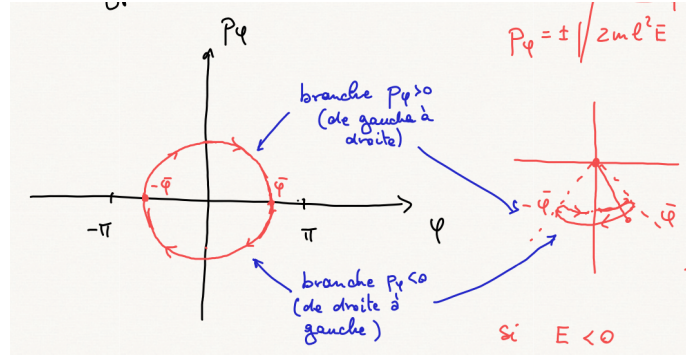
Cas 2

$$E > mgl \quad (722)$$

Dans ce cas aussi la racine existe, car même quand $\varphi = \pi$

$$1 + \frac{mgl \cos \pi}{E} = 1 - \frac{mgl}{E} > 0 \quad (723)$$

Donc on peut dessiner une courbe qui représente tous les cas du type 1



$$P_\varphi = \pm \sqrt{2ml^2 E} \sqrt{1 + \frac{mgl}{E} \cos \varphi} \quad (724)$$

Si $E < 0$ $\Rightarrow -mgl \cos \bar{\varphi} = E$ $\Rightarrow \cos \bar{\varphi} = \frac{-E}{mgl} > 0 \Rightarrow \bar{\varphi} < \frac{\pi}{2}$	Si $E > 0$ $\Rightarrow -mgl \cos \bar{\varphi} = E$ $\Rightarrow \cos \bar{\varphi} = \frac{-E}{mgl} > 0 \Rightarrow \bar{\varphi} > \frac{\pi}{2}$
---	---

(725)

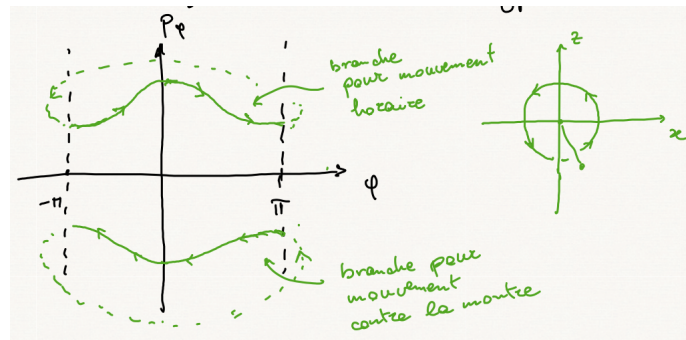
Donc cette ellipse est parcourue dans le sens horaire des aiguilles d'une montre.

Note :

$$\frac{dp_\varphi}{d\varphi} = \mp \sqrt{2ml^2 E} \frac{\frac{mgl}{E} \cos \varphi}{2\sqrt{1 + \frac{mgl}{E} \cos \varphi}} \quad (726)$$

Lorsque la masse atteint $\bar{\varphi}$, qui est la solution de $-mgl \cos \bar{\varphi} = E$, $\left. \frac{dp_\varphi}{d\varphi} \right|_{\bar{\varphi}} = \infty \Rightarrow$ donc tangente verticale .

On peut aussi dessiner les courbes du type 2



Cas 3

$$p_\varphi = \pm \sqrt{2ml^2 E} \sqrt{1 + \frac{mgl}{E} \cos \varphi} \quad (727)$$

avec $E = mgl$ on trouve

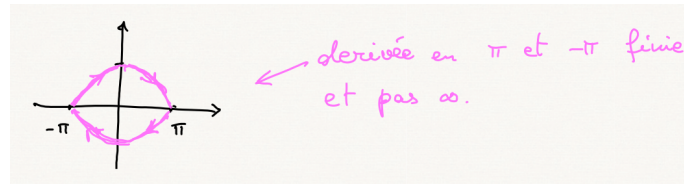
$$P_\varphi = \pm \sqrt{2m^2 l^3 g} \sqrt{1 + \cos \varphi} \quad (728)$$

qui, en proximité de π , se comporte comme

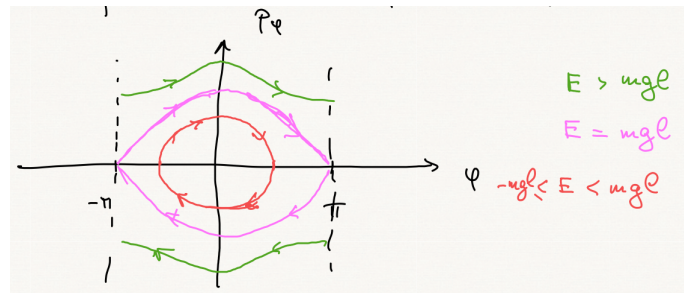
$$p_\varphi \approx \sqrt{2m^2 l^3 g} \sqrt{1 + \underbrace{\left[-1 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2\right]}_{\cos(\varphi) = -1 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2}} \quad (729)$$

$$= \pm \sqrt{2m^2 l^3 g} \frac{1}{\sqrt{2}} |x - \pi| = \pm \sqrt{m^2 l^3 g} (\pi - x) \quad (730)$$

et de façon similaire pour $-\pi$



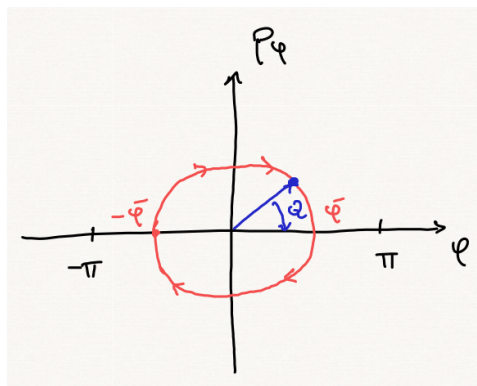
Donc on peut résumer le portrait de phase



Maintenant on peut adresser une autre question : est-ce qu'on peut calculer la période du mouvement ? Pour des petites oscillations oui, mais en générale ? Pour le faire on doit passer aux variables d'action-angle.

4.7 Variables action-angle

On prend le portrait de phase dans le cas $-mgl \leq E < mgl$



On définit l'angle qui définit sur le cycle : Q

Après une période, Q change de 2π : $Q(T) - Q(0) = 2\pi$. On appelle $\varphi \rightarrow q$ et $p_\varphi \rightarrow p$ pour ramener le problème à sa forme générale. Bien évidemment on a $Q = Q(q, E)$ car E définit le lieu, et q définit la position sur le lieu.

Donc

$$\oint dQ = 2\pi \quad \text{intégrale sur une boucle complète} \quad (731)$$

mais

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial q} dq \quad \Rightarrow \quad \oint \frac{\partial Q}{\partial q} dq = 2\pi \quad (732)$$

D'une autre part, Q est une variable qu'on peut chercher à l'aide d'une transformation canonique de type F_2 ($F_2(q, P)$). On sait que

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{\partial W}{\partial P} \quad (733)$$

On utilise W car le système est isolé.

$$2\pi = \oint \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial W}{\partial P} \right) dq = \oint \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right) dq = \frac{\partial}{\partial P} \underbrace{\oint \frac{\partial W}{\partial q} dq}_p = 2\pi \quad (734)$$

On peut extraire la dérivé partielle $\frac{\partial}{\partial P}$ de l'intégrale

Alors

$$\oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = 2\pi P \quad (735)$$

On peut l'écrire de façon plus explicite comme

$$\int_{-\bar{q}}^{\bar{q}} \frac{\partial W}{\partial q} dq + \int_{\bar{q}}^{-\bar{q}} -\frac{\partial W}{\partial q} dq = 2\pi P \quad (736)$$

On rappelle l'ambiguïté de signe en résolvant l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi.

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + V(q) = E(P) = \beta(P) \quad \text{dans une seule dimension} \quad (737)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \pm \sqrt{2m(\beta(P) - V(q))} \quad (738)$$

Donc l'équation que l'on vient de trouver

$$\int_{-\bar{q}}^{\bar{q}} \sqrt{2m(\beta(P) - V(q'))} dq' - \int_{\bar{q}}^{-\bar{q}} \sqrt{2m(\beta(P) - V(q'))} dq' = 2\pi P \quad (739)$$

devient une équation qui fixe $\beta(P)$

donc le passage par transformation canonique à une variable Q qui se comporte de façon déterminée nécessite un choix spéciale de $\beta(P)$.

Dans ce cas, on sait que $\dot{Q} = \frac{\partial \beta(P)}{\partial P}$

$$\Rightarrow Q(t) = \frac{\partial \beta(P)}{\partial P} t + Q(0) \quad (740)$$

et alors

$$Q(T) - Q(0) = \frac{\partial \beta(P)}{\partial P} T = 2\pi \quad (741)$$

et on trouve la période

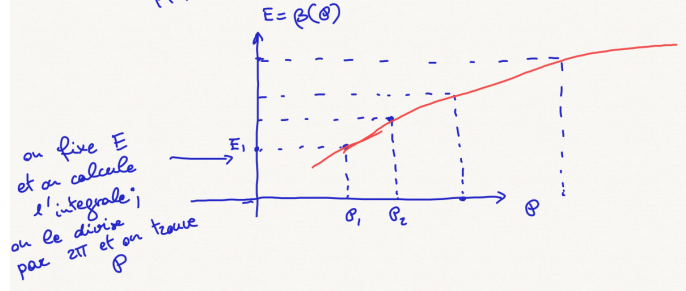
$$T = 2\pi \left(\frac{\partial \beta(P)}{\partial P} \right)^{-1} \quad (742)$$

En générale, l'intégrale

$$\int \sqrt{2m(\beta(P) - V(q))} dq \quad (743)$$

ne peut pas se faire, mais on peut soit chercher des approximations analytiques, soit la résoudre numériquement :

$$2 \int_{-q}^{\bar{q}} \sqrt{2m(\underbrace{E}_{\beta(P)} - V(q))} dq = 2\pi P \quad (744)$$



Une fois que la fonction $\beta(P)$ est connue numériquement, on peut (numériquement) calculer sa dérivée et donc

$$T = 2\pi \left(\frac{\partial \beta}{\partial P} \right)^{-1} \quad (745)$$

Exemple de calcul explicite : oscillateur harmonique

$$2 \int_{-q}^{\bar{q}} \sqrt{2m \left(E - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \right)} dq \quad (746)$$

$$= 2\sqrt{2mE} \int_{-q}^{\bar{q}} \sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2E} q^2} dq \quad (747)$$

on pose $\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q = \sin \theta \Rightarrow dq = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \cos \theta d\theta$ et on rappelle que $\bar{q} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$

$$= 2\sqrt{2mE} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \quad (748)$$

$$= 4 \frac{E}{\omega} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (749)$$

$$= 4 \frac{E}{\omega} \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \quad (750)$$

$$= 4 \frac{E}{\omega} \frac{\pi}{2} + \underbrace{4 \frac{E}{\omega} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{=0} = 2 \frac{E}{\omega} \pi \quad (751)$$

$$\Rightarrow 2\pi P = 2 \frac{\beta(P)}{\omega} \pi \Rightarrow P = \frac{\beta(P)}{\omega} \Rightarrow \beta(P) = K(P) = \omega P \quad (752)$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \left(\frac{\partial \beta(P)}{\partial P} \right)^{-1} = 2\pi \frac{1}{\omega} = \boxed{\frac{2\pi}{\omega} = T} \quad (753)$$

qui est la réponse correct.

Donc, dans le cas harmonique la relation entre P et K qui nous aide à trouver la période est presque triviale : $K(\beta) = \omega P$. Mais dans un cas plus compliqué on pourrait avoir une autre relation.

Dans la tradition, on appelle les variables qui changent de 2π à chaque période "variables angle", et les P correspondants s'appellent "variables action".

On les indique

$$\begin{aligned} Q_i &\longrightarrow \theta_i (\text{ou } \omega_i) \\ P_i &\longrightarrow I_i \end{aligned} \quad (754)$$

La dénomination "angle" est facile à voir en regardant ce qu'elle indique dans le portrait de phase. La dénomination "action" se voit déjà au niveau dimensionnelle :

$$T = 2\pi \left(\frac{\partial K}{\partial I} \right)^{-1} \Rightarrow [I] = [T][k] = \text{temps} \cdot \text{énergie} = \text{action} \quad (755)$$

5 Notes variées

5.1 Système séparable

$$\phi_i \left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i} \right) = c_i \quad (756)$$

collection de $3N$ ($3N - k$) systèmes unidimensionnels

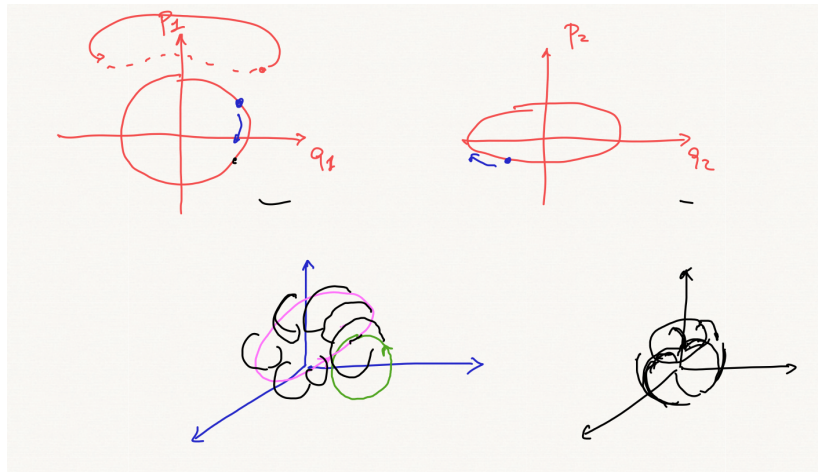
Isolé : E est fixé. $E(\{q_i\}, \{p_i\}) \rightarrow$ surface à $3N - 1$ dim. dans l'espace de phase.

$3N$ équations : chacune donne une surface dans l'espace de phase ($\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i$)

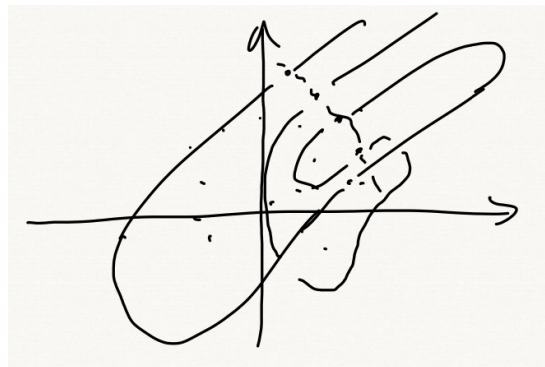
$\Rightarrow$ Le système évolue sur l'intersection

(vrai pour tous les systèmes intégrables, pas seulement si séparable)

Surface à $3N$ dimensions dans l'espace de phase à $6N$ dimensions (voir la moitié de la dimension de l'espace de phase)



En générale, le système évolue sur un trou à $3N$ dimensions dans l'espace de phase. Section de Poincaré



5.2 Coordonnées normales

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \underline{\underline{M}} \dot{\vec{q}} - \frac{1}{2} \vec{q}^T \underline{\underline{K}} \vec{q} \quad K_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad (757)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} K_{ij} q_i q_j \quad m_{ij} = m_i \delta_{ij} \quad (758)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (759)$$

$$\Rightarrow \sum_j m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_j K_{ij} q_j = 0 \quad (760)$$

$$3N \text{ équations couplées (3N oscillateurs harmoniques couplés)} \quad (761)$$

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} = 0 \quad \text{couplées} \quad (762)$$

$$\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} = 0 \quad (763)$$

On considère maintenant $\underline{\underline{U}}$ diagonalisant $\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \Rightarrow \underline{\underline{U}} (\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}) \underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{\Lambda}}$ (diagonale)

$$\underbrace{\underline{\underline{U}} \ddot{\underline{\underline{q}}}}_{\ddot{\underline{\underline{y}}}} + \underbrace{\underline{\underline{U}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}}^{-1}}_{\underline{\underline{\Lambda}}} \underbrace{\underline{\underline{U}} \underline{\underline{q}}}_{\underline{\underline{y}}} = 0 \quad (764)$$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{\underline{y}}} + \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{y}} = 0 \quad (765)$$

Le deuxième terme fait office de force de rappel.

On a donc $3N$ équations découplées $3N$ oscillateurs harmoniques découplés.

Les équations sont découplées

$$\ddot{y}_i + \lambda_i y_i = 0 \quad (766)$$

oscillateur harmonique de fréquence $\sqrt{\lambda_i}$

$$L = \frac{1}{2} \dot{\underline{\underline{q}}}^\top \underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{q}}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{q}}^\top \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} \quad K_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad (767)$$

où le deuxième terme étant $\sum_{ij} K_{ij} q_i q_j$

On voit tout de suite que les degrés de liberté sont couplés.

On introduit $\underline{\underline{O}}$ orthogonale ($\underline{\underline{O}}^{-1} = \underline{\underline{O}}^\top$)

$$\underline{\underline{O}} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{O}}^{-1} = \underline{\underline{\Lambda}}_k \quad (768)$$

$$L = \frac{1}{2} \dot{\underline{\underline{q}}}^\top \underbrace{\underline{\underline{O}}^\top \underline{\underline{O}}}_{\underline{\underline{I}}} \underbrace{\underline{\underline{M}} \underline{\underline{O}}^\top \underline{\underline{O}}}_{\underline{\underline{I}}} \dot{\underline{\underline{q}}} - \frac{1}{2} \dot{\underline{\underline{q}}}^\top \underbrace{\underline{\underline{O}}^\top \underline{\underline{O}}}_{\underline{\underline{I}}} \underbrace{\underline{\underline{K}} \underline{\underline{O}}^\top \underline{\underline{O}}}_{\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{q}} \quad K_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad (769)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\underline{\underline{\xi}}}^\top \underbrace{\underline{\underline{O}} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{O}}^\top}_{\text{non diag.}} \dot{\underline{\underline{\xi}}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{\xi}}^\top \underline{\underline{\Lambda}}_k \underline{\underline{\xi}} \quad (770)$$

avec $\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{O}} \underline{\underline{q}}$.

Les ξ_i sont découplés

$\Rightarrow$ Il faut diagonaliser les deux, $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{K}}$, en même temps.

$$L = \frac{1}{2} \dot{\underline{\underline{q}}}^\top \underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{q}}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{q}}^\top \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} \quad (771)$$

On diagonalise ici avec $\underline{\underline{z}} = \underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}} \underline{\underline{q}}$ et $\dot{\underline{\underline{z}}} = \underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}} \dot{\underline{\underline{q}}}$

$$L = \frac{1}{2} \dot{\underline{z}}^\top \dot{\underline{z}} - \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^\top \overbrace{\underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}} \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}}^{\underline{\underline{I}}} \overbrace{\underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}} \underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}}}^{\underline{\underline{I}}} \dot{\underline{q}} \quad (772)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\underline{z}}^\top \dot{\underline{z}} - \frac{1}{2} \dot{\underline{z}}^\top \underline{\underline{\tilde{K}}} \dot{\underline{z}} \quad (773)$$

with $\underline{\underline{\tilde{K}}} = \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}$

On cherche $\underline{\underline{R}}$ tel que $\underline{\underline{R}} \underline{\underline{\tilde{K}}} \underline{\underline{R}}^\top = \underline{\underline{\Lambda}}_{\underline{\underline{\tilde{K}}}}$

On rappelle que $\underline{\underline{R}}^\top = \underline{\underline{R}}^{-1}$ pour matrices orthogonales.

$$L = \frac{1}{2} \dot{\underline{z}}^\top \overbrace{\underline{\underline{R}}^\top \underline{\underline{R}}}^{\underline{\underline{I}}} \dot{\underline{z}} - \frac{1}{2} \dot{\underline{z}}^\top \overbrace{\underline{\underline{R}}^\top \underline{\underline{R}} \underline{\underline{\tilde{K}}} \underline{\underline{R}}^\top \underline{\underline{R}}}^{\underline{\underline{I}}} \dot{\underline{z}} \quad (774)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\underline{Q}}^\top \dot{\underline{Q}} - \frac{1}{2} \dot{\underline{Q}}^\top \underline{\underline{\Lambda}}_{\underline{\underline{\tilde{K}}}} \dot{\underline{Q}} \quad (775)$$

avec $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{R}} \dot{\underline{z}}$

Les $\underline{\underline{Q}}_i$ sont maintenant découplées car $\underline{\underline{\Lambda}}_{\underline{\underline{\tilde{K}}}}$ est diagonales

$$L = \sum_i \left[\frac{1}{2} \dot{Q}_i^2 - \frac{1}{2} \lambda_{\underline{\underline{\tilde{K}}}, i} Q_i^2 \right] \quad (776)$$

avec $\ddot{Q}_i + \lambda_{\underline{\underline{\tilde{K}}}, i} Q_i = 0$ où $\lambda_{\underline{\underline{\tilde{K}}}, i}$ sont les valeurs propres de $\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}$

Par rappel $\ddot{y}_i + \lambda_i y_i = 0$ où λ_i sont les valeurs propres de $\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}$

$$(\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}) \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \quad (777)$$

$$\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}} \underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}} \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \quad (778)$$

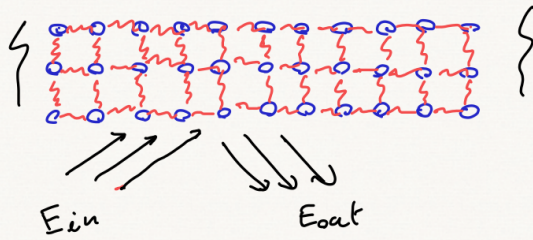
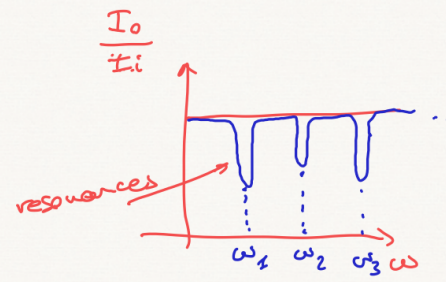
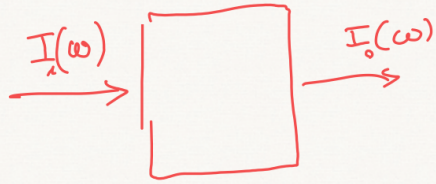
$$\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}} (\underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}} \vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i \quad (779)$$

$$\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}} (\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}) (\underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}} \vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i \quad (780)$$

$$(\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}) (\underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}} \vec{v}_i) = \lambda_i (\underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}} \vec{v}_i) \quad (781)$$

$$\underline{\underline{\tilde{K}}} \cdot \vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i \quad (782)$$

Les valeurs propres de $\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}$ et $\underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-\frac{1}{2}}$ sont les mêmes et les vecteurs propres correspondantes sont liés par un changement de base $\vec{v}_i \rightarrow \underline{\underline{M}}^{\frac{1}{2}} \vec{v}_i = \vec{u}_i$



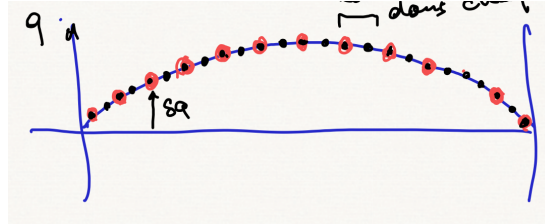
$$E = \frac{h f(\omega)}{\frac{h}{2\pi}} = h \omega$$

frequency

6 Théorie des champs

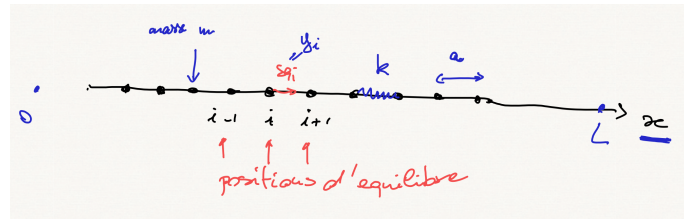
6.1 Introduction à la théorie des champs

Passage au continu : corde vibrante



La masse dans chaque interval ne change pas. A la limite, à l'intérieur d'un interval dl , on a une masse λdl , avec λ densité linéique de masse.

Système de masses discrètes liées par des ressorts en 1D



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \sum_i \dot{y}_i^2 \\ V &= \frac{1}{2} k \sum_i (y_{i+1} - y_i)^2 \Rightarrow L = T - V \end{aligned} \quad (783)$$

ici chaque déplacement intervient deux: une fois avec le déplacement qui précède $(y_i - y_{i-1})^2$, et une fois avec celui qui suit $(y_{i+1} - y_i)^2$.

On fait le passage au continu.

$$a \rightarrow 0 \quad m \rightarrow ? \quad k \rightarrow ? \quad (784)$$

Energie potentielle

$$\begin{aligned} y_i &= y(x_i) \\ y_{i+1} &= y(x_{i+1}) = y(x_i + a) \end{aligned} \quad (785)$$

$$V = \frac{1}{2} k \sum_i (y_{i+1} - y_i)^2 = \frac{1}{2} k \sum_i [y(x_i + a) - y(x_i)]^2 \quad (786)$$

$$= \frac{1}{2} k \sum_i \left[\frac{y(x_i + a) - y(x_i)}{a} \right]^2 a^2 \quad (787)$$

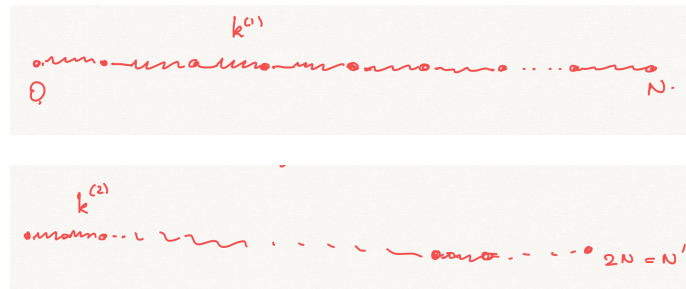
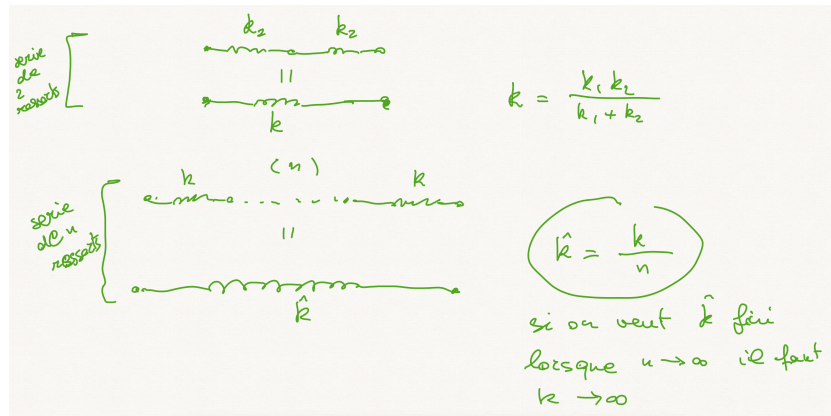
$$= \frac{1}{2} k a \sum_i \left[\frac{y(x_i + a) - y(x_i)}{a} \right]^2 a \quad (788)$$

$$= \frac{1}{2} k a \int_0^L dx \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (789)$$

A la dernière ligne on a introduit la limite de a tendant vers 0. La somme sur i prend alors la forme d'une intégrale à la Riemann. De plus on définit le préfacteur comme étant le module de Young en 1D $\lim_{a \rightarrow 0} (k \cdot a) = Y$

Pour deux ressort en série on trouve $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ et pour une série de n ressorts : $\hat{k} = \frac{k}{n}$.

$$k_{\text{mesuré}} = k_{ON} = \frac{k^{(1)}}{N} \quad (790)$$



Et ensuite on double le nombre de ressort $N' = 2N$

$$k_{0N'} = \frac{k^{(2)}}{N'} = \frac{k^{(2)}}{2N} = k_{\text{mesuré}} = \frac{k^{(1)}}{N} \quad (791)$$

$$\Rightarrow k^{(2)} = 2k^{(1)} \quad (792)$$

$$\Rightarrow \text{implique que pour } n \rightarrow \infty \quad k^{(n)} \rightarrow n \cdot k^{(1)} \quad (793)$$

Chaque passage on double N .

$$k^{(n)} = nk^{(1)} \quad (794)$$

$$a^{(n)} = \frac{a^{(1)}}{n} \rightarrow \text{on rapproche les masses}$$

$$Y = a^{(n)} k^{(n)} = nk^{(1)} \cdot \frac{a^{(1)}}{n} = k^{(1)} \cdot a^{(1)} = \text{constante} \quad (795)$$

$$V = \frac{1}{2} Y \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (796)$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{y}_i^2 = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{y}^2(x_i) \quad (797)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m}{a} \sum_i \dot{y}_i^2(x_i) \cdot a \quad (798)$$

$$= \frac{1}{2} \lambda \int \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (799)$$

Encore une fois on a considéré la limite de a tendant vers 0 à la dernière ligne. λ est la masse linéique $\rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{m}{a} \right) = \lambda < \infty$

Résumé

$$T = \frac{1}{2} \lambda \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad (800)$$

$$V = \frac{1}{2} Y \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (801)$$

$$L = T - V = \int_0^L \left[\frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (802)$$

$$= \int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{2} \lambda (\partial_t y)^2 - \frac{1}{2} Y (\partial_x y)^2 \right]}_{\mathcal{L}} dx \quad (803)$$

$$\mathcal{L} = \text{densité de Lagrangian} = \frac{1}{2} \lambda (\partial_t y)^2 - \frac{1}{2} Y (\partial_x y)^2 \quad (804)$$

6.2 Equations dynamiques : équations d'Euler-Lagrange

On passe par le principe de moindre action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_0^L dx' \mathcal{L} = \int dt' dx' \mathcal{L} \quad (805)$$

Où $dt' dx'$ représente l'élément de volume dans l'espace-temps.

$$S[y(x, t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_0^L dx' \left[\frac{1}{2} \lambda (\partial_{t'} y(x', t'))^2 - \frac{1}{2} Y (\partial_{x'} y(x', t'))^2 \right] \quad (806)$$

$y(x, t)$ est l'argument de la fonctionnelle "action".

Principe de moindre action : $\frac{\delta S}{\delta y(x, t)} = 0$

$$\frac{\delta S}{\delta y(x, t)} = \frac{\delta}{\delta y(x, t)} \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_0^L dx' \left[\frac{1}{2} \lambda (\partial_{t'} y(x', t'))^2 - \frac{1}{2} Y (\partial_{x'} y(x', t'))^2 \right] \quad (807)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_0^L dx' \left[\frac{1}{2} \lambda 2 (\partial_{t'} y(x', t')) \cdot \frac{\delta \partial_{t'} y(x', t')}{\delta y(x, t)} - \frac{1}{2} Y 2 (\partial_{x'} y(x', t')) \cdot \frac{\delta \partial_{x'} y(x', t')}{\delta y(x, t)} \right] \quad (808)$$

$$\left(\frac{\delta \partial_{a'} y(x', t')}{\delta y(x, t)} = \partial_{a'} \frac{\delta y(x', t')}{\delta y(x, t)} = \partial_{a'} [\delta(t - t') \delta(x - x')] \right) \quad (809)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_0^L dx' [\lambda (\partial_{t'} y(x', t')) \cdot (\partial_{t'} \delta(t - t')) \delta(x - x') - Y (\partial_{x'} y(x', t')) \cdot \delta(t - t') (\partial_{x'} \delta(x - x'))] \quad (810)$$

$$\left(\int f(x') \delta(x - x') dx' = f(x) \right) \quad (811)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt' \lambda (\partial_{t'} y(x, t')) \partial_{t'} \delta(t - t') - \int_0^L dx' Y (\partial_{x'} y(x', t)) \partial_{x'} \delta(x - x') \quad (812)$$

$$= \lambda (\partial_{t'} y(x, t')) \underbrace{\delta(1 - t')}_{t-t' \neq 0} \Big|_{t'=t_1}^{t'=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt' \lambda [\partial_{t'}^2 y(x, t')] \cdot \delta(t - t') \quad (813)$$

$$- Y (\partial_{x'} y(x', t)) \underbrace{\delta(x - x')}_{x-x' \neq 0} \Big|_{x'=0}^{x'=L} + \int_0^L dx' Y [\partial_{x'}^2 y(x', t)] \cdot \delta(x - x') \quad (814)$$

$$= -\lambda \partial_t^2 y(x, t) + Y \partial_x^2 y(x, t) + 0 \quad (\text{si on exclu les bords spatiaux et temporelles}) \quad (815)$$

Pourquoi les parties "aux bords" sont-elles nulles ?

Petit rappel du principe de moindre action pour degrés de liberté discrets $\{q_i\}$

$$S[\{q_i\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t') dt' \quad (816)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta S}{\delta q_j(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i(t')} \underbrace{\frac{\delta q_i(t')}{\delta q_j(t)}}_{\delta(t-t')\delta_{ij}} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t')} \frac{\delta \dot{q}_i(t')}{\delta q_j(t)} \right\} dt' \quad (817)$$

$$= \sum_i \delta_{ij} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i(t')} \delta(t-t') dt' + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t')} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta q_i(t')}{\delta q_j(t)} \right) dt' \quad (818)$$

$$= \sum_i \delta_{ij} \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} + \left\{ \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t_2)} \frac{\delta q_i(t_2)}{\delta q_j(t)} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t_1)} \frac{\delta q_i(t_1)}{\delta q_j(t)} \right] \right\} - \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t')} \right) \underbrace{\frac{\delta q_i(t')}{\delta q_j(t)}}_{\delta(t-t')\delta_{ij}} dt' \quad (819)$$

$$= - \sum_i \delta_{ij} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] + \left\{ \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t_2)} \frac{\delta q_i(t_2)}{\delta q_j(t)} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t_1)} \frac{\delta q_i(t_1)}{\delta q_j(t)} \right] \right\} \quad (820)$$

Mais pour appliquer le principe de moindre action on doit fixer $q_i(t_1)$ et $q_i(t_2) \forall i$, c'est à dire, que la solution ("les bonnes fonctions $\{q_i(t)\}$ ") est à trouver parmi les fonctions qui satisfont ces conditions aux bords.

Donc, lorsque on fait une variation de fonction, $\frac{\delta q_i}{\delta q_j}$, en t_2 et t_1 la variation est toujours 0 : si $i \neq j$, trivialement car ils sont degrés de liberté différentes; si $i = j$, car $q_i(t_1)$ et $q_i(t_2)$ ne peuvent pas changer si on change la fonction. Donc la contribution de la variation aux bords est nulle et :

$$\frac{\delta S}{\delta q_j(t)} = - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (821)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (822)$$

Maintenant on revient aux champs :

$$S[y(x, t)] = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L dt' dx' \mathcal{L}(\partial_{x'} y(x', t'), \partial_{t'} y(x', t')) \quad (823)$$

A remarquer : q_i et q_j sont des degrés de liberté différents si $i \neq j$

Dans le cas des champs on a : $i \rightarrow x$, donc $y(x)$ et $y(x')$ sont degrés de liberté différents si $x \neq x'$.

On prend la variation de l'action :

$$\frac{\delta S}{\delta y(x, t)} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L dt' dx' \frac{\delta}{\delta y(x, t)} \mathcal{L}(\partial_{x'} y(x', t'), \partial_{t'} y(x', t')) \quad (824)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L dt' dx' \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{x'} y)} \frac{\delta \partial_{x'} y(x', t')}{\delta y(x, t)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{t'} y)} \frac{\delta \partial_{t'} y(x', t')}{\delta y(x, t)} \right\} \quad (825)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L dt' dx' \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{x'} y)} \partial_{x'} \frac{\delta y(x', t')}{\delta y(x, t)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{t'} y)} \partial_{t'} \frac{\delta y(x', t')}{\delta y(x, t)} \right\} \quad (826)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt' \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{x'} y)} \frac{\delta y(x', t')}{\delta y(x, t)} \right) \Big|_L - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{x'} y)} \frac{\delta y(x', t')}{\delta y(x, t)} \right) \Big|_0 \right] \quad (827)$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L dt' dx' \left(\partial_{x'} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{x'} y)} \frac{\delta y(x', t')}{\delta y(x, t)} \right) \quad (828)$$

$$+ \int_0^L dx' \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{t'} y)} \frac{\delta y(x', t')}{\delta y(x, t)} \right) \Big|_{t_2} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{t'} y)} \frac{\delta y(x', t')}{\delta y(x, t)} \right) \Big|_{t_1} \right] \quad (829)$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L dt' dx' \left(\partial_{t'} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{t'} y)} \frac{\delta y(x', t')}{\delta y(x, t)} \right) \quad (830)$$

On rappelle que $\frac{\delta y(x', t')}{\delta y(x, t)} = \delta(x - x') \delta(t - t')$ et donc on a

$$\frac{\delta S}{\delta y(x, t)} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L dt' dx' \left[\partial_{x'} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{x'} y)} + \partial_{t'} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{t'} y)} \right] \delta(x - x') \delta(t - t') + \{\text{contribution aux bords}\} \quad (831)$$

$$= - \left[\partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x y)} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t y)} \right] + \{\text{contribution aux bords}\} \quad (832)$$

Est-ce que les contributions aux bords sont nulles ?

Si on reprend ce qu'on avait dit lorsque les degrés de liberté étaient discrets, alors $\{q_i(t_2)\}$ et $\{q_i(t_1)\}$ fixés deviennent $y(x, t_2)$ et $y(x, t_1)$ fixés.

Donc

$$\frac{\delta y(x', t_2)}{\delta y(x, t)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta y(x', t_1)}{\delta y(x, t)} = 0 \quad (833)$$

Par contre, qu'est-ce qu'on peut dire de

$$\frac{\delta y(L, t')}{\delta y(x, t)} \quad \text{et de} \quad \frac{\delta y(0, t')}{\delta y(x, t)} \quad (834)$$

Si $x \neq L$ la première est nulle ($x \neq L \Rightarrow y(x)$ est un degré de liberté différent de $y(L)$);
similairement pour la deuxième si $x \neq 0$.

Si $x = L$, la deuxième est nulle parce que l'on regarde des degrés de liberté différents, mais pas nécessairement la première. Pour qu'elle soit nulle il faut ajouter des conditions. Donc on fixe aussi $y(L, t)$ à une valeur donnée $\forall t$ (et similairement pour $y(0, t)$) de façon à fixer le comportement aux bords spatio-temporels des fonctions parmi lesquelles on cherche les solutions.

Ces conditions ont souvent une interprétation physique. Par exemple, si le bord spatiale est à l'infini, on pose $y(x, t) = 0$ si $x \rightarrow \infty$, qui pose la densité d'énergie (qui normalement est une fonction croissante de y) à zéro pour x allant à l'infini, de façon que l'énergie totale (intégrale de la densité d'énergie) soit finie.

Donc finalement, on a

$$\frac{\delta S}{\delta y(x, t)} = -\lambda \partial_t^2 y(x, t) + Y \partial_x^2 y(x, t) = 0 \quad (835)$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 y - \frac{Y}{\lambda} \partial_x^2 y = 0 \quad (\text{équation d'onde}) \quad (836)$$

$$v = \sqrt{\frac{\lambda}{Y}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0} \quad (837)$$